

# Διακριτά Μαθηματικά

[Rosen, κεφ. 5]

Ιωάννης Εμίρης  
Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών  
ΕΚΠΑ

Φθινόπωρο 2025

# Επαγωγή και Αναδρομή

[Rosen, κεφ. 5]

## Μαθηματική επαγωγή [Rosen 5.1]

**Μέθοδος απόδειξης** μιας μαθηματικής πρότασης  $\Pi(n)$ , η οποία εξαρτάται από έναν φυσικό  $n \in \mathbb{N}$ .

Σκοπός είναι να δείξουμε πως η  $\Pi(n)$  είναι αληθής,  $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ .

Δύο στάδια:

1. **Βάση:** Δείχνουμε πως η  $\Pi(n_0)$  είναι αληθής.
2. **Επαγωγική Υπόθεση:** Θεωρούμε πως ισχύει η  $\Pi(k)$ , όπου  $k \geq n_0$ .

**Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε πως  $\Pi(k) \Rightarrow \Pi(k + 1)$ .

## Παράδειγμα επαγωγής

Για  $a \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , δείξτε πως

$$\Pi(n) : 1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Λύση.

- ▶ Επαγωγική βάση,  $\Pi(0)$ :  $1 = (a - 1)/(a - 1)$  : αληθής.
- ▶ Βήμα:  $1 + \cdots + a^k + a^{k+1} = (a^{k+2} - 1)/(a - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{k+1} - 1 + a^{k+2} - a^{k+1} = a^{k+2} - 1 : \text{ αληθής.}$$



# Επαγωγή για ανισότητα

Παράδειγμα.

Οι αρμονικοί αριθμοί ορίζονται ως

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}, \quad j \geq 1.$$

Ν.δ.ό.  $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Λύση.

- ▶ Βάση:  $n = 0 : H_1 = 1 \geq 1$ .  
 $n = 1 : H_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$
- ▶ Επαγωγικό Βήμα.

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

# Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου

Θεώρημα.

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου  $A_\nu$ ,  $|A_\nu| = \nu \geq 0$ .

Βήματα απόδειξης:

1. Θα δείξουμε ότι η υπόθεση ισχύει για το κενό σύνολο και τα μονοσύνολα: Βάση επαγωγής.
2. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο αυθαίρετο σύνολο  $A_{k-1}$  με  $k - 1$  στοιχεία και θα δείξουμε ότι ισχύει για το  $A_k$  που προκύπτει από το  $A_{k-1}$  προσθέτοντας ένα στοιχείο: Επαγωγικό βήμα.

# Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου: Απόδειξη

Απόδειξη.

**Βάση επαγωγής:** Για το  $A_0 = \emptyset$  έχουμε  $|2^{A_0}| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$   
Επιπλέον για το  $A_1 = \{a\}$  έχουμε  $|2^{A_1}| = |\{\emptyset, \{a\}\}| = 2 = 2^1$

**Επαγωγικό βήμα:**  $A_k = A_{k-1} \cup \{a\}$ ,  $|A_k| = k \geq 1$ .

Κάθε υποσύνολο του  $A_k$  **είτε** περιέχει το  $a$  **είτε** όχι. Αν όχι, τα υποσύνολα είναι τα στοιχεία του  $P(A_{k-1})$ . Αλλιώς γράφονται  $B \cup \{a\}$  για  $B \subset A_{k-1}$ :

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(A_{k-1}) \cup \left( \bigcup_{B \subseteq A_{k-1}} \{B \cup \{a\}\} \right) \\ &= P(A_{k-1}) \cup \left( \bigcup_{B \in P(A_{k-1})} \{B \cup \{a\}\} \right) \\ \Rightarrow |P(A_k)| &= |P(A_{k-1})| + |(\cdots)| \\ &= 2 \cdot |P(A_{k-1})| = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k. \end{aligned}$$

Η  $\cup$  αντιστοιχεί σε αποκλειστική διάζευξη άρα ο πληθικός αριθμός της ισούται με το **άθροισμα** των πληθικών αριθμών.

# Βήματα απόδειξης

1. Εκφράζουμε την πρόταση που πρόκειται να αποδειχθεί στη μορφή “για κάθε  $n \geq b$ ,  $P(n)$ ”, για ένα σταθερό ακέραιο  $b$ .
2. Γράφουμε τις λέξεις “Βήμα βάσης”. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι η  $P(b)$  είναι αληθής, προσέχοντας να χρησιμοποιείται η σωστή τιμή του  $b$ . Με τον τρόπο αυτό, ολοκληρώνεται το πρώτο βήμα της απόδειξης.
3. Γράφουμε τις λέξεις “Επαγωγικό βήμα”.
4. Δηλώνουμε και προσδιορίζουμε ξεκάθαρα την επαγωγική υπόθεση, στη μορφή “έστω ότι η  $P(k)$  είναι αληθής για αυθαίρετο σταθερό ακέραιο  $k \geq b$ ”.
5. Δηλώνουμε αυτό που χρειάζεται να αποδειχθεί, αν η επαγωγική υπόθεση είναι αληθής. Δηλαδή, γράφουμε τι λέει η  $P(k + 1)$ .
6. Αποδεικνύουμε την πρόταση  $P(k + 1)$ , χρησιμοποιώντας την υπόθεση  $P(k)$ . Βεβαιωνόμαστε ότι η απόδειξή μας ισχύει για κάθε ακέραιο  $k$ , με  $k \geq b$ , προσέχοντας ότι η απόδειξη εργάζεται για μικρές τιμές του  $k$ , συμπεριλαμβανομένης της τιμής  $k = b$ .
7. Προσδιορίζουμε ξεκάθαρα το συμπέρασμα του επαγωγικού βήματος, λέγοντας “με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα”.
8. Μετά από την ολοκλήρωση του βήματος βάσης και του επαγωγικού βήματος, γράφουμε το συμπέρασμα, δηλαδή ότι από τη μαθηματική επαγωγή προκύπτει ότι η  $P(n)$  είναι αληθής για κάθε ακέραιο  $n$ ,  $n \geq b$ .

## Ισχυρή Επαγωγή [Rosen 5.2]

Τα δύο στάδια της ισχυρής επαγωγής είναι:

1. **Βάση:** Δείχνουμε πως η  $\Pi(n_0)$  είναι αληθής.
2. **Επαγωγική Υπόθεση:** Θεωρούμε πως ισχύουν όλες οι  $\Pi(n_0), \dots, \Pi(k)$ , όπου  $k \geq n_0$ .  
**Επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε πως  $[\Pi(i), i = n_0, \dots, k] \Rightarrow \Pi(k + 1)$ .

Καλείται και **Πλήρης Επαγωγή**.

# Παράδειγμα

Κάθε φυσικός  $n \geq 2$  είναι είτε πρώτος είτε γινόμενο πρώτων.

Απόδειξη.

Βάση: Ο  $n = 2$  είναι πρώτος.

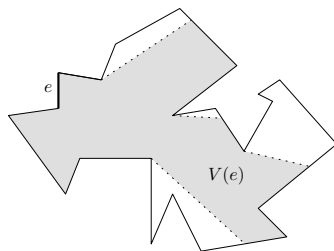
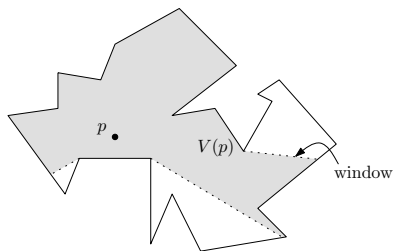
Επαγωγική υπόθεση: Η πρόταση ισχύει για  $i = 2, \dots, k$ .

Επαγωγικό βήμα:

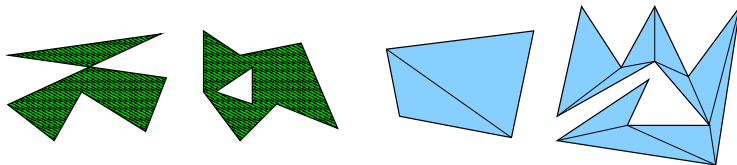
- ▶ Αν ο  $k + 1$  είναι πρώτος, η πρόταση αποδείχθηκε.
- ▶ Αλλιώς  $\exists a, b : 1 < a, b < k + 1$  τέτοια ώστε  $k + 1 = ab$ .  
Από Υπόθεση οι  $a, b$  είναι είτε πρώτοι είτε γινόμενα πρώτων,  
άρα κι ο  $k + 1$  είναι γινόμενο πρώτων.



# Υπολογιστική Γεωμετρία

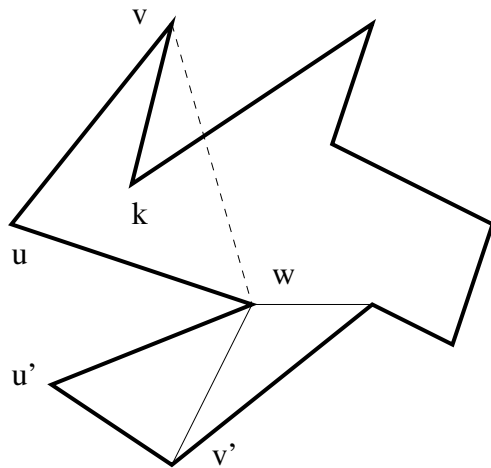


**Απλό πολύγωνο:** ορίζεται από μια ακολουθία ακμών οι οποίες τέμνονται μόνο ανά δύο γειτονικές σε μια (κοινή) κορυφή.



Μη απλά και απλά πολύγωνα (κυρτό και μη κυρτό).

## Διαγώνιοι



**Λήμμα.** Κάθε απλό πολύγωνο με  $\geq 4$  ακμές έχει μια εσωτερική διαγώνιο.

Θα αποδειχθεί αργότερα.

# Τριγωνοποίηση

## Θεώρημα.

Κάθε απλό πολύγωνο με  $n \geq 3$  ακμές υποδιαιρείται (τριγωνοποιείται) σε  $n - 2$  τρίγωνα (χωρίς επικαλύψεις).

## Απόδειξη.

**Βάση.**  $n = 3$  τρίγωνο,  $n = 4$  τετράπλευρο κυρτό ή μη.

**Επαγωγική Υπόθεση.** Η πρόταση ισχύει για πολύγωνα με  $k$  ακμές,  $k \geq 3$ .

**Επαγωγικό Βήμα.** Θα δείξουμε την πρόταση για πολύγωνο με  $k + 1$  ακμές,  $k \geq 3$ .

- ▶ Από το Λήμμα φέρνουμε διαγώνιο που υποδιαιρεί το πολύγωνο σε δύο πολύγωνα με πλήθος ακμών  $j + 1$ ,  $(k + 1) - j + 1$ , αντίστοιχα. Καθένα έχει  $\geq 3$  ακμές (π.χ.  $j \geq 2$ ).
- ▶ Καθένα τριγωνοποιείται με  $j - 1$ ,  $k - j$  τρίγωνα, άρα συνολικά  $k - 1$  τρίγωνα. □

## Τριγωνοποίηση (Συνέχεια)

Το προηγούμενο θεώρημα χρειάζεται μια συμπληρωματική απόδειξη ότι  $j + 1, (k + 1) - j + 1 \in [3, k]$ .

### Πρόταση 1.

Έστω πολύγωνο με  $k + 1$  ακμές. Τότε υπάρχει διαγώνιος του πολυγώνου που το διαιρεί σε δύο πολύγωνα με πλήθος ακμών  $j + 1$  και  $(k + 1) - j + 1$  αντίστοιχα με  $j + 1, (k + 1) - j + 1 \in [3, k]$

### Απόδειξη.

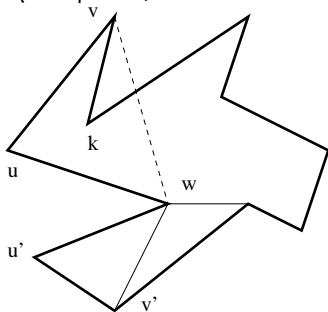
- ▶ Αφού η υποδιαίρεση μας έδωσε δύο πολύγωνα ο ελάχιστος αριθμός ακμών και των δύο είναι 3.
- ▶ Ο ελάχιστος αριθμός ακμών του αρχικού πολυγώνου που μπορεί να ανήκει σε ένα πολύγωνο της υποδιαίρεσης είναι 2. Άρα ο μέγιστος αριθμός ακμών του αρχικού πολυγώνου που μπορεί να ανήκει σε ένα πολύγωνο της υποδιαίρεσης είναι  $k + 1 - 2 + 1(\text{διαγώνιος}) = k$ .

# Απόδειξη Λήμματος

**Λήμμα.** Κάθε απλό πολύγωνο με  $\geq 4$  ακμές έχει μία εσωτερική διαγώνιο.

**Απόδειξη.** Έστω η αριστερότερη κορυφή  $u$  του πολυγώνου, και  $v, w$  οι γειτονικές της κορυφές. Αν η διαγώνιος  $vw$  είναι εσωτερική, το Λήμμα αποδείχθηκε.

Αλλιώς, η  $vw$  τέμνει το πολύγωνο. Από τις κορυφές εντός του τριγώνου  $\Delta(vuw)$ , επιλέγουμε την  $k$  ώστε η γωνία  $\angle uvk$  να είναι ελάχιστη, και παίρνουμε την διαγώνιο  $uk$ .



# Αναδρομικός ορισμός [Rosen 5.3]

## Αναδρομικός ή επαγωγικός ορισμός συναρτήσεων

- ▶ **Βάση:** η τιμή της συνάρτησης στο σημείο  $n_0 = 0$ , ή σε περισσότερα σημεία ώστε να είναι καλώς ορισμένη.
- ▶ **Αναδρομικό Βήμα:** Κανόνας εύρεσης τιμής σε κάποιον ακέραιο, από τις τιμές σε μικρότερους ακεραίους.

## Παράδειγμα.

Η συνάρτηση Fibonacci:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

# Παράδειγμα

Ν.δ.ό. για τη Fibonacci:

$$f_n > \phi^{n-2}, \quad n \geq 3, \phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618.$$

Απόδειξη.

Ισχυρή επαγωγή.

Βάση για  $n = 3, 4$ :  $f_3 = 2 > \phi$ ,  $f_4 = 3 > \phi^2 = (3 + \sqrt{5})/2$ .

Επαγωγική/Αναδρομική υπόθεση:

$$f_j > \phi^{j-2}, \quad 3 \leq j \leq k.$$

Παρατηρήστε πως το  $\phi$  είναι λύση της  $x^2 - x - 1 = 0$ .

Επαγωγικό/Αναδρομικό Βήμα: Για  $k \geq 4$ , θ.δ.ό.

$$f_{k+1} > \phi^{k-1} = \phi^2 \phi^{k-3} = (\phi + 1) \phi^{k-3} = \phi^{k-2} + \phi^{k-3}.$$

Γνωρίζουμε  $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ , άρα η ανισότητα ισχύει.



## Παράδειγμα

Έστω  $a_0$  μια σταθερά και για  $n \geq 1$  :

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a_i a_{(n-1)-i}$$

Ν.δ.ό. για  $n \geq 0$  ισχύει  $a_n = (n!) a_0^{n+1}$ . **Σημείωση:**  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή.

**Βάση** για  $n = 0$ :  $a_0 = (0!)a_0^{0+1} \Rightarrow a_0 = a_0$ .

**Επαγωγική/Αναδρομική υπόθεση:** Για κάποιο  $k \geq 0$  ισχύει:

$$a_n = (n!)a_0^{n+1}, \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, k$$

**Επαγωγικό Βήμα:** Θα δείξουμε το αποτέλεσμα για  $n = k + 1$ .

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση για  $a_i, a_{k-i}$  έχουμε:

## Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_i a_{k-i} \\&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (i!) (a_0^{i+1}) (k-i)! (a_0^{k-i+1}) \\&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (i!) (k-i)! (a_0^{k+2}) \\&= \sum_{i=0}^k k! a_0^{k+2} \\&= (k+1) (k! a_0^{k+2}) = (k+1)! a_0^{k+2}.\end{aligned}$$

Οπότε η ισότητα του επαγωγικού βήματος επαληθεύεται και άρα για κάθε  $n \geq 0$  ισχύει  $a_n = (n!) a_0^{n+1}$ . □

# Δομική επαγωγή

Μια απόδειξη δομικής επαγωγής αποτελείται από δύο βήματα:

- ▶ **Βήμα Βάσης:** Δείχνουμε το αποτέλεσμα για τα στοιχεία στο βήμα βάσης του αναδρομικού ορισμού.
- ▶ **Αναδρομικό / επαγωγικό Βήμα:** Δείχνουμε πως, αν η πρόταση αληθεύει για τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή νέων στοιχείων στο αναδρομικό βήμα του ορισμού, τότε το αποτέλεσμα ισχύει για τα νέα αυτά στοιχεία.

Η δομική επαγωγή εφαρμόζεται στην απόδειξη ιδιοτήτων για αναδρομικώς ορισμένα σύνολα.

# Αναδρομικά ορισμένα σύνολα

Παράδειγμα.

Υποσύνολο  $S$  ακέραιων αριθμών, που ορίζεται ως εξής:

**Βάση:**  $3 \in S$ .

**Αναδρομικό Βήμα:**  $x \in S, y \in S$  τότε  $x + y \in S$ .

Θα δείξουμε πως  $S = A$ , όπου  $A$  το σύνολο των θετικών πολλαπλασίων του 3.

Απόδειξη.

**$A \subseteq S$ :** Κάθε  $3n \in S$  με (απλή) επαγωγή ως προς  $n \geq 1$ .

**$S \subseteq A$ :** (Δομική επαγωγή)

- ▶ Στοιχεία συνόλου από Βάση:  $3 \in A$ .
- ▶ Στοιχεία από Αναδρομή: Θ.δ.ό.  $x, y \in S \Rightarrow x + y \in A$ :

$$x, y \in S \Rightarrow x, y \in A$$

$$\Rightarrow x + y \in A$$

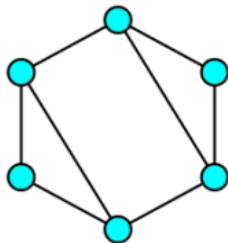
επαγωγική υπόθεση

ως πολλαπλάσια του 3  $\square$

## Δένδρα με ρίζα

Μελετάμε την απλούστερη κατηγορία γράφων (graphs): τα δένδρα (trees) είναι συνεκτικοί γράφοι χωρίς κύκλο.

**Δένδρα με ρίζα:** αποτελούνται από ένα σύνολο κορυφών/κόμβων με μια ξεχωριστή κορυφή, τη ρίζα, και ακμές που συνδέουν ορισμένους κόμβους. (Για δυο κόμβους, είτε υπάρχει μοναδική ακμή είτε όχι).



Παράδειγμα συνεκτικού γράφου ο οποίος δεν είναι δέντρο.

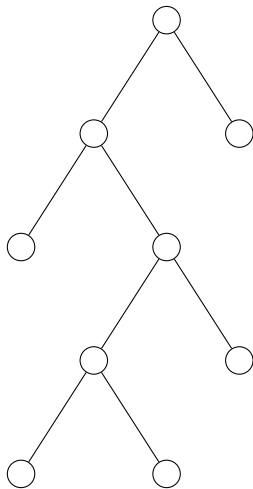
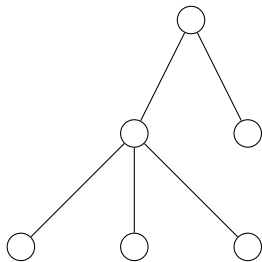
# Πλήρες δυαδικό δένδρο

Αναδρομικός ορισμός Πλήρους Δυαδικού Δένδρου (πδδ)

Αναδρομική Βάση: Υπάρχει πλήρες δυαδικό δένδρο (πδδ) αποτελούμενο μόνο από μια κορυφή/κόμβο  $r$  (τη ρίζα).

Αναδρομικό βήμα. Αν  $T_1, T_2$  πδδ, υπάρχει πδδ που γράφεται  $T = T_1 \cdot T_2$  αποτελούμενο από μια ρίζα  $r$  μαζί με τις ακμές που συνδέουν την  $r$  με καθεμιά από τις ρίζες των υποδένδρων  $T_1, T_2$ .

## Παραδείγματα



Ο γράφος **αριστερά** είναι δέντρο αλλά **όχι** πδδ. Ο γράφος **δεξιά** είναι πδδ.

# Αναδρομικοί ορισμοί: Ύψος, πλήθος κόμβων, φύλλα

Ύψος  $h(T)$  ενός πδδ  $T$ :

Βάση:  $h(T) = 0$ , αν το  $T$  αποτελείται μόνο από τη ρίζα.

Αναδρομικό βήμα: Αν  $T_1, T_2$  είναι πδδ, τότε το πδδ  $T = T_1 \cdot T_2$  έχει ύψος  $h(T) = 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$ .

Πλήθος κόμβων/κορυφών  $n(T)$  πδδ  $T$ :

Βάση:  $n(T) = 1$ , αν το  $T$  αποτελείται μόνο από τη ρίζα.

Αναδρομικό βήμα: Αν  $T_1, T_2$  είναι πδδ, τότε το πδδ  $T = T_1 \cdot T_2$  έχει  $n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2)$ .

Σύνολο φύλλων (leaves) ενός πδδ  $T$ :

Βάση: Αν το  $T$  αποτελείται μόνο από τη ρίζα τότε αυτή είναι το (μοναδικό) φύλλο του  $T$ .

Αναδρομικό: Αν  $T_1, T_2$  είναι πδδ, το σύνολο των φύλλων του πδδ  $T = T_1 \cdot T_2$  είναι η ένωση των συνόλου των φύλλων του  $T_1$  και  $T_2$ . Όσοι κόμβοι δεν είναι φύλλα λέγονται **εσωτερικοί**.

# Σχέση ύψους και πλήθους κόμβων

Θεώρημα.

Για κάθε πδδ  $T$  ισχύει:

$$n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1.$$

Βήμα βάσης: Αν το  $T$  αποτελείται μόνο από ρίζα,

$$n(T) = 1 \leq 2^{0+1} - 1.$$

Αναδρομικό βήμα:

$$\begin{aligned} n(T) &= 1 + n(T_1) + n(T_2) \\ &\leq 1 + (2^{h_1+1} - 1) + (2^{h_2+1} - 1) \\ &\leq 2 \max\{2^{h_1+1}, 2^{h_2+1}\} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{\max\{h_1, h_2\}+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 = 2^{h(T)+1} - 1 \quad \square \end{aligned}$$

## Σχέση πλήθους φύλλων και εσωτερικών κόμβων

Έστω πδδ  $T$ ,  $l(T)$  το πλήθος των φύλλων του και  $i(T)$  το πλήθος των εσωτερικών κόμβων του. Ν.δ.ό:

$$l(T) = i(T) + 1.$$

**Βήμα βάσης:** Αν το  $T$  αποτελείται μόνο από ρίζα, δεν έχει εσωτερικούς κόμβους:  $l(T) = 1$ , ενώ  $i(T) = 0$ : η σχέση ισχύει.

**Αναδρομικό βήμα:** Έστω πδδ  $T_1, T_2$  και υποθέτουμε  $l(T_j) = i(T_j) + 1, j = 1, 2$ . Η ρίζα του πδδ  $T = T_1 \cdot T_2$  είναι εσωτερικός κόμβος του  $T$ , και κάθε εσωτερικός κόμβος στα  $T_1, T_2$  είναι εσωτερικός κόμβος του  $T$ :  $i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1$ .

Ομοίως, τα φύλλα των  $T_1, T_2$  είναι επίσης φύλλα του  $T$ , οπότε  $l(T) = l(T_1) + l(T_2)$ . Άρα:

$$\begin{aligned} l(T) &= l(T_1) + l(T_2) = i(T_1) + 1 + i(T_2) + 1 \\ &= (i(T_1) + i(T_2) + 1) + 1 = i(T) + 1. \quad \square \end{aligned}$$