

## 4. Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

Rosen Κεφ. 8

Ιωάννης Εμίρης  
Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών  
ΕΚΠΑ

Φθινόπωρο 2025

# Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Διωνυμικοί Συντελεστές

Γενικευμένες μεταθέσεις και συνδυασμοί

Ασκήσεις

# Μεταθέσεις (permutations)

- ▶ **Μετάθεση** ενός συνόλου διακεκριμένων αντικειμένων ονομάζουμε μια διατεταγμένη τοποθέτηση αυτών των αντικειμένων (διάταξη).
- ▶ Ενδιαφερόμαστε επίσης για τις διατεταγμένες μεταθέσεις ενός υποσυνόλου: **Μετάθεση- $r$**  (μετάθεση ανά  $r$ ) ονομάζουμε την διατεταγμένη τοποθέτηση  $r$  στοιχείων του συνόλου μας.

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα 1.

Έστω το σύνολο  $S = \{1, 2, 3\}$ . Η διάταξη  $[3, 1, 2]$  είναι μια μετάθεση του  $S$ , ενώ η διάταξη  $[3, 1]$  είναι μια *μετάθεση-2* του  $S$ .

## Παράδειγμα 2.

Πόσα αποτελέσματα υπάρχουν σε ένα άθλημα όπου δίνονται μετάλλια στους 3 πρώτους αθλητές από ένα σύνολο 100 συμμετεχόντων; **Λύση:**  $P(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970.200$

# Πλήθος μεταθέσεων

Το πλήθος των μεταθέσεων- $r$   $n$  στοιχείων συμβολίζεται  $P(n, r)$

## Θεώρημα 1.

Έστω  $n$  θετικός ακέραιος και  $r$  ακέραιος τέτοιος ώστε  $1 \leq r \leq n$ .  
Τότε το πλήθος των μεταθέσεων- $r$  είναι

$$P(n, r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ όροι}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

## Απόδειξη.

Το πρώτο στοιχείο της διάταξης μπορεί να επιλεγεί με  $n$  τρόπους.  
Το δεύτερο με  $n-1$  τρόπους και με την ίδια λογική το  $r$ -οστό  
στοιχείο με  $n-(r-1)$  τρόπους. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του  
γινομένου βρίσκουμε το αποτέλεσμα. □

# Ισοδύναμες περιγραφές

- ▶ Το πλήθος  $P(n, r)$  μεταθέσεων  $r$  αριθμών από  $\{1, \dots, n\}$ .
- ▶ Ισούνται με μεταθέσεις  $r$  αντικειμένων (σε  $r$  αριθμημένες θέσεις) από  $n$  διαφορετικά αντικείμενα,  $n \geq r$ .
- ▶ Εστω  $r$  **αριθμημένες** μπάλες,  $n$  **διακριτά/αριθμημένα** κουτιά,  $n \geq r$ , σε κάθε κουτί το πολύ 1 μπάλα:  
#τοποθετήσεων =  
$$n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} =: P(n, r).$$
- ▶ Οι  $r$ -άδες **διαφορετικών** στοιχείων  $\in A \times \cdots \times A = A^r$ ,  $|A| = n$ , είναι  $P(n, r)$ .

# Παραδείγματα Μεταθέσεων

## *Παράδειγμα 3.*

$r = 2$  αριθμημένες μπάλες σε  $n = 3$  διακριτά κουτιά  
τοποθετούνται με  $P(3, 2) = 3! = 6$  τρόπους:

$[\alpha|\beta| -], [\beta|\alpha| -], [\alpha| -|\beta], [\beta| -|\alpha], [-|\alpha|\beta], [-|\beta|\alpha]$ .

# Παραδείγματα Μεταθέσεων

## Παράδειγμα 3.

$r = 2$  αριθμημένες μπάλες σε  $n = 3$  διακριτά κουτιά τοποθετούνται με  $P(3, 2) = 3! = 6$  τρόπους:

$[\alpha|\beta| -], [\beta|\alpha| -], [\alpha| -|\beta], [\beta| -|\alpha], [-|\alpha|\beta], [-|\beta|\alpha].$

## Παράδειγμα 4.

Τετραψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί, χωρίς επαναλαμβανόμενα ψηφία και να μην ξεκινούν από 0.

- ▶ Μεταθέσεις 4 από 10 αντικείμενα  $P(10, 4) = \frac{10!}{6!} = 5040$ .  
 $\#\{0xyz\} = P(9, 3) = \frac{9!}{6!} = 504$ .

Με τον κανόνα του αθροίσματος:

$$P(10, 4) - \#\{0xyz\} = 5040 - 504 = 4536.$$

- ▶ Ισοδύναμα,  $\#\{\mu xyz\} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ .



# Συνδυασμοί

Στις μεταθέσεις μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποια αντικείμενα επιλέγουμε αλλά και σε ποια σειρά τα διατάσσουμε αφού τα επιλέξουμε.

Αναγκαία συνθήκη ήταν τα αντικείμενα (ή είδη) να είναι διακεκριμένα (αριθμημένα).

Στους συνδυασμούς μας ενδιαφέρει με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε κάποια αντικείμενα από ένα ευρύτερο σύνολο, χωρίς να μετράμε τις διαφορετικές διατάξεις των επιλεγμένων αντικειμένων.

Απαριθμούμε δηλ. το πλήθος υποσυνόλων.

# Συνδυασμοί

## Ορισμός.

*Συνδυασμός- $r$*  στοιχείων ενός συνόλου  $n$  στοιχείων ονομάζεται η μη διατεταγμένη επιλογή  $r$  στοιχείων του συνόλου και συνήθως συμβολίζεται με  $C(n, r)$  (combinations).

## Θεώρημα 2.

Έστω  $n$  θετικός ακέραιος και  $r$  ακέραιος τέτοιος ώστε  $0 \leq r \leq n$ . Τότε το πλήθος των συνδυασμών- $r$ , δηλ. των μη διατεταγμένων επιλογών  $r$  στοιχείων, είναι

$$C(n, r) := \frac{n!}{r!(n-r)!} =: \binom{n}{r}.$$

# Συνδυασμοί

## Απόδειξη 1.

Τοποθετούμε  $r$  μπάλες **ίδιου χρώματος** σε  $n$  αριθμημένα κουτιά,  $r \leq n$ . Κάθε κουτί περιέχει το **πολύ 1 μπάλα**. Οι συνδυασμοί είναι:

$$\#_{\text{τοποθετήσεων}} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} =: C(n, r),$$

διότι  $r!$  διατάξεις των μπαλών είναι ίδιες (κανόνας γινομένου). □

## Απόδειξη 2.

Οι μεταθέσεις- $r$  προκύπτουν με τον σχηματισμό  $C(n, r)$  *συνδυασμών- $r$* , όπου καθένας διατάσσεται με  $P(r, r)$  τρόπους:

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r) \Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = C(n, r) \cdot r!$$



# Παραδείγματα

## *Παράδειγμα 5.*

- ▶ 30 αστροναύτες προπονούνται για την αποστολή στον Αρη
- ▶ Με πόσους τρόπους επιλέγεται μια 6μελής αποστολή;

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα 5.

- ▶ 30 αστροναύτες προπονούνται για την αποστολή στον Άρη
- ▶ Με πόσους τρόπους επιλέγεται μια 6μελής αποστολή;

**Απάντηση:**  $C(30, 6) = \frac{30!}{24!6!} \approx 600 \cdot 10^3$  συνδυασμοί.

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα 5.

- ▶ 30 αστροναύτες προπονούνται για την αποστολή στον Άρη
- ▶ Με πόσους τρόπους επιλέγεται μια 6μελής αποστολή;

**Απάντηση:**  $C(30, 6) = \frac{30!}{24!6!} \approx 600 \cdot 10^3$  συνδυασμοί.

## Παράδειγμα 6.

- ▶ Οι υποψήφιοι για μια επιτροπή είναι 9 μαθηματικοί και 11 επιστήμονες πληροφορικής.
- ▶ Πόσες επιτροπές υπάρχουν με 3 μαθηματικούς και 4 επιστήμονες πληροφορικής;

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα 5.

- ▶ 30 αστροναύτες προπονούνται για την αποστολή στον Αρη
- ▶ Με πόσους τρόπους επιλέγεται μια 6μελής αποστολή;

**Απάντηση:**  $C(30, 6) = \frac{30!}{24!6!} \approx 600 \cdot 10^3$  συνδυασμοί.

## Παράδειγμα 6.

- ▶ Οι υποψήφιοι για μια επιτροπή είναι 9 μαθηματικοί και 11 επιστήμονες πληροφορικής.
- ▶ Πόσες επιτροπές υπάρχουν με 3 μαθηματικούς και 4 επιστήμονες πληροφορικής;

**Απάντηση:**  $C(9, 3) \cdot C(11, 4)$ .

# Συνδυαστικές Ταυτότητες

- ▶  $0! = 1$ .
- ▶  $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$ .
- ▶  $\binom{n}{1} = n$ .
- ▶  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$ , δηλ.  $C(n, r) = C(n, n - r)$ .
- ▶  $\binom{n}{r} := 0$ ,  $\forall r > n$  &  $\forall r < 0$  (σύμβαση)



# Υποσύνολα

$P(M) = 2^{|M|} = \#$  τρόποι επιλογής υποσυνόλου του  $M$ .

## Παράδειγμα 7.

$M = \{A, B, C\}$ .

- ▶  $|P(M)| = 2^3 = 8$ .
- ▶  $\#(\text{Υποσυνόλων με 2 στοιχεία}) = \binom{3}{2} = 3$ .
- ▶  $\#(\text{Διατεταγμένων υποσυνόλων με 2 στοιχεία}) = 3 \cdot 2 = 6$ .

## Παράδειγμα 8.

$M = \text{Μπάλες μπιλιάρδου} = \{1, 2, \dots, 15\}$ .

- ▶  $|P(M)| = 2^{15} = 32768$ .
- ▶  $\#(\text{Υποσυνόλων με 3 μπάλες}) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!}$ .
- ▶  $\#(\text{Διατεταγμένων υποσυνόλων με 3 μπάλες}) = 15 \cdot 14 \cdot 13$ .

## Ταυτότητα του Pascal

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \\ = & \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} \left( \frac{1}{n-r} + \frac{1}{r} \right) = \quad . \\ = & \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} \frac{n}{(n-r)r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$



Βρείτε και μια συνδυαστική Απόδειξη.

# Συνδυαστική Απόδειξη

Η συνδυαστική απόδειξη μιας ταυτότητας χρησιμοποιεί εργαλεία απαρίθμησης ώστε να αποδειχθεί η ισότητα των δυο μελών της ταυτότητας, ή δείχνει την ύπαρξη μιας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης μεταξύ των συνόλων που απαριθμούνται από τα δύο μέλη της ταυτότητας.

# Συνδυαστική Απόδειξη

Θεώρημα. Θα δείξουμε ότι  $C(n, r) = C(n, n - r)$  χρησιμοποιώντας μια συνδυαστική απόδειξη:

Εστω  $A \subseteq S$  με  $r$  στοιχεία. Υπάρχουν  $C(n, r)$  τέτοια.

Το  $A$  ορίζεται μονοσήμαντα μέσω του συμπληρώματός του  $A^c = S - A$ , που έχει  $n - r$  στοιχεία.

Επεται ότι το πλήθος των υποσυνόλων με  $r$  στοιχεία είναι  $C(n, n - r)$  και άρα  $C(n, r) = C(n, n - r)$ .

**Ασκηση:** Υπάρχει συνδυαστική απόδειξη με την χρήση αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης;

Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Διωνυμικοί Συντελεστές

Γενικευμένες μεταθέσεις και συνδυασμοί

Ασκήσεις

# Διωνυμικό Θεώρημα

## Θεώρημα 3.

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}, \quad n \geq 0.$$

Γι'αυτό οι αριθμοί  $\binom{n}{r}$  καλούνται διωνυμικοί συντελεστές.

## Παράδειγμα 9.

Βρείτε το ανάπτυγμα του  $(x + y)^4$ .

**Απάντηση:**

$$\begin{aligned} (x + y)^4 &= \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} x^j y^{4-j} = \\ &= y^4 + 4y^3x + 6y^2x^2 + 4yx^3 + x^4 \end{aligned}$$

# Επαγωγική απόδειξη

**Βάση.**  $n = 0$ :  $1 = 1$ ,  $n = 1$ :  $x + y = x^0y + xy^0$ .

**Επαγωγικό βήμα:**

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= (x + y) \cdot \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} x^r y^{n-1-r} = \quad (\text{επαγωγή}) \\&= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} x^{r+1} y^{n-1-r} + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} x^r y^{n-r} = \\&= \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r-1} x^r y^{n-r} + \\&\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r} x^r y^{n-r} + \binom{n-1}{0} y^n = \\&= \binom{n}{0} y^n + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} x^r y^{n-r} + \binom{n}{n} x^n \quad (\text{Pascal})\end{aligned}$$

# Διωνυμικό Θεώρημα

**Ασκηση:** Βρείτε μια συνδυαστική απόδειξη του θεωρήματος.

Ιδέα:  $(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y)$ .



# Διωνυμικό Θεώρημα

**Ασκηση:** Βρείτε μια συνδυαστική απόδειξη του θεωρήματος.

Ιδέα:  $(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y)$ .

*Παράδειγμα 10.*

Ποιος είναι ο συντελεστής του  $x^{10}y^{15}$  στο  $(x + y)^{25}$ ;

**Απάντηση:**

$$\binom{25}{10} = \frac{25!}{10!15!} = 3.268.760$$

# Άμεσα πορίσματα

►  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

(θέτουμε  $x = y = 1$ )

►  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(θέτουμε  $x = 1, y = -1$ )

►  $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$

( $x, y = ?$ )

# Επιλογές υποσυνόλου

## Επαγωγική απόδειξη

Η ταυτότητα  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  είναι σημαντική γιατί απαριθμεί τις επιλογές υποσυνόλων ενός συνόλου. Θα την αποδείξουμε με δυο ακόμα τρόπους.

## Επαγωγική απόδειξη στο $n$ .

Επαγωγικό Βήμα:

$$\begin{aligned}\sum_0^n \binom{n}{k} &= 1 + \sum_0^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!k!} = 1 + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right) \\&= 1 + 2^{n-1} + \sum_1^{n-1} \frac{(n-1)!k}{(n-k-1)!k!(n-k)} = 1 + 2^{n-1} + \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \\&= 1 + 2^{n-1} + \sum_0^{n-2} \binom{n-1}{k} = 1 + 2^{n-1} + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1}.\end{aligned}$$



# Επιλογές υποσυνόλου

## Συνδυαστική απόδειξη

Θα αποδείξουμε το ίδιο με μια συνδυαστική απόδειξη.

Απόδειξη.

Εστω  $A$  σύνολο με  $n$  στοιχεία. Ο αριθμός των υποσυνόλων του  $A$  με ακριβώς  $k$  στοιχεία είναι  $\binom{n}{k}$ .

Από τον κανόνα του αθροίσματος ο αριθμός όλων των δυνατών υποσυνόλων του  $A$  είναι  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .

Γνωρίζοντας πως  $|P(A)| = 2^n$  ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

# Ταυτότητα Vandermonde

## Θεώρημα 4.

Εστω  $n, m, r$  θετικοί ακέραιοι με  $r \leq n$  και  $r \leq m$ . Τότε

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

# Ταυτότητα Vandermonde

## Θεώρημα 4.

Εστω  $n, m, r$  θετικοί ακέραιοι με  $r \leq n$  και  $r \leq m$ . Τότε

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

Συνδυαστική απόδειξη: Πλήθος επιλογών  $r$  αντικειμένων από δύο σύνολα πλήθους  $m, n$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τα  $k$  αντικείμενα που επιλέγονται από  $n$ .

# Ταυτότητα Vandermonde

## Θεώρημα 4.

Εστω  $n, m, r$  θετικοί ακέραιοι με  $r \leq n$  και  $r \leq m$ . Τότε

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}.$$

Συνδυαστική απόδειξη: Πλήθος επιλογών  $r$  αντικειμένων από δύο σύνολα πλήθους  $m, n$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τα  $k$  αντικείμενα που επιλέγονται από  $n$ .

## Πόρισμα 1 ( $n = m = r$ ).

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

# Επιπλέον ταυτότητα

## Θεώρημα 5.

Εστω  $n, r$  θετικοί ακέραιοι με  $r \leq n$ . Τότε

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r}.$$



# Επιπλέον ταυτότητα

## Θεώρημα 5.

Εστω  $n, r$  θετικοί ακέραιοι με  $r \leq n$ . Τότε

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r}.$$

Συνδυαστική απόδειξη: Πλήθος επιλογών  $r+1$  αντικειμένων από  $n+1$ , όπου το αντικείμενο με μέγιστο αριθμό είναι το υπ'αριθμό  $r+1, r+2, \dots, n+1$ , άρα  $\sum_{j=r+1}^{n+1} \binom{j-1}{r}$ . Θέτουμε  $k = j-1$ .

Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Διωνυμικοί Συντελεστές

Γενικευμένες μεταθέσεις και συνδυασμοί

Ασκήσεις

# Επεκτείνοντας τα εργαλεία απαρίθμησης

- ▶ Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι κάθε αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί 1 φορά. Σε αυτήν την παράγραφο εισάγουμε την έννοια των επαναλήψεων
- ▶ Επίσης κάποια στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να μην ξεχωρίζουν το ένα από το άλλο

# Μεταθέσεις με επαναλήψεις

Θέλουμε να τοποθετήσουμε  $r$  **αριθμημένες** μπάλες σε  $n$  **αριθμημένα** κουτιά. Κάθε κουτί επιτρέπεται να περιέχει οποιοδήποτε πλήθος μπαλών.

Υπάρχουν  $n$  επιλογές για κάθε μπάλα, άρα  $n^r$  τρόποι τοποθέτησης,  $\forall n, r$ .

Ισοδύναμα,

- τρόποι διάταξης  $r$  αντικειμένων (σε  $r$  αριθμημένες θέσεις) από  $n$  είδη (αντικείμενα με επανάληψη).
- $r$ -άδες στοιχείων  $\in A \times \cdots \times A = A^r : |A| = n$ , επιλογή με επανάληψη, δηλ.  $|A^r| = |A|^r$ .

## Θεώρημα 6.

Το πλήθος των  $r$ -μεταθέσεων από σύνολο  $n$  αντικειμένων, αν επιτρέπονται οι επαναλήψεις, είναι  $n^r$ .

# Παραδείγματα I

## *Παράδειγμα 11.*

ΠΡΟΠΟ: 13 αγώνες, 3 δυνατά αποτελέσματα (1, 2, X).

Όλες οι δυνατές στήλες (αποτελέσματα) είναι  $3^{13}$ .

## *Παράδειγμα 12.*

Οι συμβολοσειρές μήκους  $r$  που σχηματίζονται από το ελληνικό αλφάβητο και τα στοιχεία ! και ; είναι  $26^r$ .

# Παραδείγματα II

## Παράδειγμα 13.

Ακολουθίες  $r$  ψηφίων  $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ : πόσες με άρτιο πλήθος από 1 (άσους)?

- ▶  $3^r$  περιέχουν μόνο  $\{2, 3, 4\}$ .
- ▶ Χωρίζουμε τις υπόλοιπες ακολουθίες (που περιέχουν κάποιο 0 ή 1) σε διακριτά υποσύνολα ως προς τις θέσεις των 2, 3, 4. Π.χ. αν  $r = 8$  τότε  $x2x4x32x$ ,  $x \in \{0, 1\}$ .
- ▶ Κάθε υποσύνολο περιέχει ίδιο πλήθος ακολουθιών με άρτιο ή περιττό πλήθος άσων (βλ. επόμενη διαφάνεια). Αρα  $\frac{1}{2}(5^r - 3^r)$  ακολ. με άρτιο  $\neq$  άσων.

$$\therefore 3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r) = \frac{1}{2}(5^r + 3^r) \text{ με άρτιο πλήθος από 1.}$$

$$\text{Π.χ. } r = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(5 + 3) = 4, r = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(25 + 9) = 17.$$

## Παραδείγματα III

### Παράδειγμα 14.

Εστω δυαδικές ακολουθίες μήκους  $r \geq 1$ , δηλ. στο  $\{0, 1\}^r$ .

Αποδείξτε πως ακριβώς μισές έχουν άρτιο πλήθος από 1.

Κατασκευάζουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ ακολουθιών με άρτιο και με περιττό πλήθος από 1, με μετακύλιση (shift) δεξιά:

$$f : [a, 0] \rightarrow [1, a], \quad [a, 1] \rightarrow [0, a],$$

όπου  $a$  υπακολουθία μήκους  $r - 1$ . Μια απόδειξη πως η  $f$  είναι 1-1 γίνεται θεωρώντας την αντίστροφη:

$$f^{-1} : [0, a] \rightarrow [a, 1], \quad [1, a] \rightarrow [a, 0].$$

Πόρισμα.

$$\sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{r}{2i} = 2^{r-1}.$$

## Άσκηση

Ναδειχθεί ότι:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{r}{2i} = 2^{r-1}.$$

Περίπτωση  $r$  περιτό:

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} = \sum_{k=0, \text{ άρτιο}}^r \binom{r}{k} + \sum_{k=0, \text{ περιτό}}^r \binom{r}{k}.$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι

$$\sum_{k=0, \text{ περιτό}}^r \binom{r}{r-k} = \sum_{j=0, \text{ άρτιο}}^r \binom{r}{j}.$$

$$\text{Άρα } 2^r = 2 \sum_{j=0, \text{ άρτιο}}^r \binom{r}{j} = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{r}{2i}.$$



# Συνδυασμοί με επαναλήψεις

## Θεώρημα 7.

Υπάρχουν συνολικά  $C(n + r - 1, r)$  συνδυασμοί- $r$  από σύνολο με  $n$  αντικείμενα (είδη), όπου τα αντικείμενα (είδη) επιλέγονται με επαναλήψεις.

Περισσότεροι από  $\binom{n}{r}$  διότι κάθε αντικείμενο επιλέγεται 0, 1, 2 ή περισσότερες φορές, αντί για 0 ή 1 φορά.

**Ισοδύναμα**, τοποθετούμε  $r$  **όμοιες** μπάλες (ίδιου χρώματος) σε  $n$  αριθμημένα κουτιά, χωρίς περιορισμό μπαλών ανά κουτί,  $\forall r, n$ .

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα 15.

$r = 3$  όμοια νομίσματα,  $n = 2$  αποτελέσματα (κουτιά).

$\#$ συνδυασμών  $= \binom{2+3-1}{3} = 4$ : 3Κ, 2Κ-Γ, Κ-2Γ, 3Γ.

## Παράδειγμα 16.

3 ζάρια,  $\#$ αποτελεσμάτων  $= \binom{3+6-1}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ .

**ΟΧΙ:**  $6^3$  γιατί  $123 \sim 213$  (η σειρά δεν μας αφορά).

# Απόδειξη

## Θεώρημα 9.

$C(n + r - 1, r)$  συνδυασμοί- $r$  από  $n$  αντικείμενα με επανάληψη.  
Ισοδύναμα  $r$  όμοιες μπάλες σε  $n$  αριθμημένα κουτιά,  $\forall r, n$ .

**Απόδειξη.** Τοποθετούμε  $n - 1$  διαχωριστικά σε ακολουθία  $r$  στοιχείων επιλέγοντας τα  $n - 1$  διαχωριστικά από  $n - 1 + r$  αντικείμενα.

Π.χ.:  $\circ \circ | \circ || \circ || \circ \circ |$  για  $n = 7, r = 6$ .

# Λύσεις εξίσωσης

## Παράδειγμα 17.

Εστω  $x_1, x_2, x_3$  μη αρνητικοί ακέραιοι. Οι λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

δίνονται από το θεώρημα για  $r = 11, n = 3$ :

$$C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = 78.$$

# Συνδυασμοί μ'επαναλήψεις χωρίς κενά

## Θεώρημα 8.

Τοποθετούμε  $r$  όμοιες μπάλες σε  $n$  αριθμημένα κουτιά, με τουλάχιστον 1 μπάλα ανά κουτί, όπου  $r \geq n$ , με

$$\binom{r-1}{n-1} \text{ τρόπους.}$$

Ισοδύναμα, συνδυασμοί- $r$  από  $n$  αντικείμενα (είδη) όπου κάθε αντικείμενο επιλέγεται τουλάχιστον μια φορά.

**Απόδειξη.** Εστω  $y_i$  μπάλες στο κουτί  $i = 1, \dots, n$ . Ισοδύναμα μετράμε τα  $y_i > 0$  που ικανοποιούν:

$$\sum_{i=1}^n y_i = r = \sum_{i=1}^n (x_i + 1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i = r - n,$$

όπου  $y_i = x_i + 1$ ,  $x_i \geq 0$ . Ομως τα  $(x_1, \dots, x_n)$  είναι  $C(n + (r - n) - 1, n - 1)$ .

# Μεταθέσεις όμοιων αντικειμένων

## Θεώρημα 9.

Το πλήθος μεταθέσεων  $n$  αντικειμένων τ.ώ. να υπάρχουν  $n_1$  αντικείμενα τύπου 1 που δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους,  $n_2$  αντικείμενα τύπου 2 που δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους,  $\dots$ ,  $n_k$  αντικείμενα τύπου  $k$  που δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους, όπου

$$\sum_{i=1}^k n_i = n$$

δίνεται από τον τύπο

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Αναφερόμαστε σε μεταθέσεις **μη-διακριτών** αντικειμένων.

## "Πολυωνυμικός" συντελεστής

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_t} = \begin{cases} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}, & \text{αν } \sum_{i=1}^t n_i = n, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

### Θεώρημα 10.

Για  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(x_1 + \dots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}: \\ n_1 + \dots + n_t = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_t} x_1^{n_1} \dots x_t^{n_t}.$$

**Σημείωση:** Για  $t = 2$ , έχουμε  $\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n_2}$ .

# Αναγραμματισμοί

Για μια λέξη  $a_1 a_2 \cdots a_n$  μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα για να βρούμε το πλήθος των αναγραμματισμών.

- ▶ Θέτουμε  $k$  το πλήθος των ξεχωριστών γραμμάτων.
- ▶ Θέτουμε  $n_i$  το πλήθος επαναλήψεων του γράμματος  $i$ .
- ▶ Ελέγχουμε ότι  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ .
- ▶ Υπολογίζουμε τους αναγραμματισμούς.

## Παράδειγμα 18.

Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης  
"σκουβηκομυρμηγκότρυπα";



## Μπάλες σε κουτιά

$r$  μπάλες διαφορετικών χρωμάτων,  $n$  αριθμημένα κουτιά,  $r \leq n$   
και  $\leq 1$  μπάλα ανά κουτί: #τοποθετήσεων =  $P(n, r)$ .

Εστω  $q_1$  μπάλες ίδιου χρώματος (γαλάζιου):  $\frac{P(n, r)}{q_1!} = \frac{n!}{q_1! (n-r)!}$

Άλλες  $q_2$  μπάλες χρώματος κόκκινου:  $\frac{P(n, r)}{q_1! q_2!} = \frac{n!}{q_1! q_2! (n-r)!}$

Συνολικά  $t$  χρώματα,  $q_i \geq 1$  χρώματος  $i$ ,  $r = \sum_{i=1}^t q_i \geq t$ :

$$\text{\#τοποθετήσεων} = \frac{P(n, r)}{q_1! \cdots q_t!} =: \binom{n}{q_1, \dots, q_t, (n-r)}$$

# Κατανομή αντικειμένων σε κουτιά

## Θεώρημα 11.

Το πλήθος των τρόπων κατανομής  $n$  διακεκριμένων αντικειμένων σε  $k$  διακεκριμένα κουτιά **με επανάληψη**, έτσι ώστε  $n_i$  αντικείμενα να τοποθετούνται στο κουτί  $i$ , είναι

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

**Σημείωση:** Υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των δυο τελευταίων περιπτώσεων: μεταθέσεις μη διακριτών αντικειμένων και κατανομή αντικειμένων σε κουτιά με επανάληψη.

# Παράδειγμα I

## Παράδειγμα 19.

- ▶ 4 παίχτες πόκερ, 5 φύλλα ο καθένας.
- ▶ Αντιστοιχία παίκτη με "κουτί":  $n_i = 5$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .
- ▶ Πέμπτο "κουτί" τα φύλλα που δεν μοιράστηκαν: περιέχει  $52 - 20 = 32$  φύλλα.

Σύνολο συνδυασμών:

$$\frac{52!}{(5!)^4 32!}$$

# Παράδειγμα II

## Παράδειγμα 20.

15 γραφεία στον νέο όροφο του κτηρίου Πληροφορικής,  
12 βάφονται: 3 πράσινα, 2 ιώδη, 2 κίτρινα, 5 λευκά.  
Πόσοι τρόποι βαφής υπάρχουν;

Όσοι κι οι τρόποι τοποθέτησης 12 μπαλών (3 πράσινες κλπ)  
σε 15 αριθμημένα κουτιά, άρα

$$\frac{P(15, 12)}{3!2!2!5!} = \binom{15}{3, 2, 2, 5, 3} = 75.675.600.$$

Π.χ. 4 γραφεία, 2 πράσινα, 1 ιώδες:  $\binom{4}{2, 1, 1} = 12$ :

1234 1234, 1234 1234, 1234 1234,  
1234 1234, 1234 1234, 1234 1234.

## Άσκηση με 4 τρόπους

Κάθονται **5** διαφορετικά άτομα σε σειρά **12** καρεκλών (αριθμ.):

**1ος:** Μεταθέσεις 5 εκ των 12 αντικειμένων, δηλ.,

$$P(12, 5) = \frac{12!}{7!} = 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 8.$$

## Άσκηση με 4 τρόπους

Κάθονται **5** διαφορετικά άτομα σε σειρά **12** καρεκλών (αριθμ.):

**1ος:** Μεταθέσεις 5 εκ των 12 αντικειμένων, δηλ.,

$$P(12, 5) = \frac{12!}{7!} = 12 \cdot 11 \cdots 8.$$

**2ος:** Επιλέγω 5 καρέκλες για τα άτομα με  $C(12, 5)$  τρόπους, διατάσσω τα άτομα με  $5!$  τρόπους.

$$\text{Κανόνας Γινομένου} \Rightarrow 5! C(12, 5) = 5! C(12, 7).$$

## Άσκηση με 4 τρόπους

Κάθονται **5** διαφορετικά άτομα σε σειρά **12** καρεκλών (αριθμ.):

**1ος:** Μεταθέσεις 5 εκ των 12 αντικειμένων, δηλ.,

$$P(12, 5) = \frac{12!}{7!} = 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 8.$$

**2ος:** Επιλέγω 5 καρέκλες για τα άτομα με  $C(12, 5)$  τρόπους, διατάσσω τα άτομα με  $5!$  τρόπους.

$$\text{Κανόνας Γινομένου} \Rightarrow 5! C(12, 5) = 5! C(12, 7).$$

**3ος:** Μεταθέσεις 12 αντικειμένων:  $q_1 = \dots = q_5 = 1, q_6 = 7$ :

$$\binom{12}{1,1,1,1,1,7} = \frac{12!}{7!} = 95040.$$

## Άσκηση με 4 τρόπους

Κάθονται **5** διαφορετικά άτομα σε σειρά **12** καρεκλών (αριθμ.):

**1ος:** Μεταθέσεις 5 εκ των 12 αντικειμένων, δηλ.,

$$P(12, 5) = \frac{12!}{7!} = 12 \cdot 11 \cdots 8.$$

**2ος:** Επιλέγω 5 καρέκλες για τα άτομα με  $C(12, 5)$  τρόπους, διατάσσω τα άτομα με  $5!$  τρόπους.

$$\text{Κανόνας Γινομένου} \Rightarrow 5! C(12, 5) = 5! C(12, 7).$$

**3ος:** Μεταθέσεις 12 αντικειμένων:  $q_1 = \cdots = q_5 = 1, q_6 = 7$ :

$$\binom{12}{1,1,1,1,1,7} = \frac{12!}{7!} = 95040.$$

**4ος:**  $5!$  διατάξεις ατόμων:  $\sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 \sqcup A_5 \sqcup$ .

2ο πείραμα: 7 καρέκλες σε 6 κενά: 7 όμοιες μπάλες σε 6 αριθμημένα κουτιά, χωρίς περιορισμό ανά κουτί:

$$C(6 + 7 - 1, 7).$$

$$\text{Κανόνας Γινομένου} \Rightarrow 5! C(12, 7) = 5! \frac{12!}{7!5!} = \frac{12!}{7!}$$



## Άσκηση (παραλλαγή)

- ▶ 5 διαφορετικά άτομα σε σειρά 12 καρεκλών (αριθμ.), αλλά να ΜΗΝ υπάρχουν 2 διπλανά άτομα.

5! διατάξεις ατόμων για  $A_1KA_2KA_3KA_4KA_5$ ,  
απομένουν 3 καρέκλες: τοποθέτηση 3 καρεκλών σε 6 κενά  
με  $C(6 + 3 - 1, 3)$  τρόπους  $\therefore 5! \frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!} = 6720$ .

## Άσκηση (παραλλαγή)

- ▶ 5 διαφορετικά άτομα σε σειρά 12 καρεκλών (αριθμ.), αλλά να ΜΗΝ υπάρχουν 2 διπλανά άτομα.

5! διατάξεις ατόμων για  $A_1KA_2KA_3KA_4KA_5$ ,  
απομένουν 3 καρέκλες: τοποθέτηση 3 καρεκλών σε 6 κενά  
με  $C(6 + 3 - 1, 3)$  τρόπους  $\therefore 5! \frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!} = 6720$ .

- ▶ Αν, επιπλέον, υπάρχουν άτομα στις 2 ακραίες καρέκλες:
  - Τότε, 5! διατάξεις  $A_1KA_2KA_3KA_4KA_5$ , απομένουν 3 καρέκλες σε 4 κενά με  $C(3 + 4 - 1, 3)$  τρόπους.
  - Ισοδύναμα, 5! διατάξεις  $A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 \sqcup A_5$ , απομένουν 7 καρέκλες σε 4 κενά με  $C(7 - 1, 4 - 1) = C(6, 3)$  τρόπους  $\therefore 5! \frac{6!}{3!3!} = 2400$  τρόποι.

# Σύνοψη

Εστω  $r \leq n$  όταν έχουμε  $\leq 1$  μπάλα ανά κουτί ή επιλέγονται αντικείμενα χωρίς επανάληψη. Αν τα  $r, n$  δεν περιορίζονται, έχουμε οσοδήποτε μπάλες ανά κουτί (ή επιλογές με επανάληψη).

- ▶  $n^r$  μεταθέσεις/διατάξεις με επανάληψη
- ▶  $P(n, r) = n!/(n - r)!$  μεταθέσεις,  $r \leq n$
- ▶  $C(n, r) = \binom{n}{r}$  συνδυασμοί,  $r \leq n$
- ▶  $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_t! \cdot (n - r)!}$  μεταθέσεις με  $r_1 + \cdots + r_t = r$  μπάλες  $\leq n$ ,  $t$  χρωμάτων
- ▶  $C(n + r - 1, n - 1)$  συνδυασμοί με επανάληψη
- ▶  $C(r - 1, n - 1)$  συνδ. με επανάληψη χωρίς κενά,  $r \geq n$

Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Διωνυμικοί Συντελεστές

Γενικευμένες μεταθέσεις και συνδυασμοί

Ασκήσεις

## Άσκηση 0

Ένα μπουλ περιέχει 10 κόκκινες και 10 μπλε μπάλες. Μια γυναίκα διαλέγει στην τύχη μπάλες, χωρίς να κοιτάει.

- (α) Πόσες μπάλες (έστω  $N_1$ ) πρέπει να επιλέξει ώστε να έχει τουλάχιστον 3 ίδιου χρώματος;
- (β) Πόσες μπάλες (έστω  $N_2$ ) πρέπει να επιλέξει ώστε να έχει τουλάχιστον 3 μπλε;

**Απάντηση.** (α) Γενικευμένο θεώρημα του περιστερών   
Με 2 φωλιές:

$$\lceil N_1/2 \rceil \geq 3 \Leftrightarrow N_1 \geq 5.$$

(β) Πρέπει να εξαντλήσουμε την πιθανότητα να διαλέξει η γυναίκα όλες τις κόκκινες μπάλες πρώτα, άρα  $N_2 = 13$ .

# Άσκηση 1

**Υπόθ. 1.** 7 ημέρες , καθεμία αντιστοιχεί σε 1 μάθημα.

**Υπόθ. 2.** 4 μαθήματα, πρέπει να μελετηθούν όλα.

► Πόσα Προγράμματα Μελέτης υπάρχουν;

**Λύση:**  $4^7 - |A_1 \cup \dots \cup A_4|$ , όπου  $4^7 = 16.384$  και

$A_i := \{\text{Προγράμματα χωρίς μάθημα } i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

# Άσκηση 1

**Υπόθ. 1.** 7 ημέρες , καθεμία αντιστοιχεί σε 1 μάθημα.

**Υπόθ. 2.** 4 μαθήματα, πρέπει να μελετηθούν όλα.

► Πόσα Προγράμματα Μελέτης υπάρχουν;

**Λύση:**  $4^7 - |A_1 \cup \dots \cup A_4|$ , όπου  $4^7 = 16.384$  και

$A_i := \{\text{Προγράμματα χωρίς μάθημα } i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Εγκλεισμός / Αποκλεισμός: [► incexc](#)

$$|A_i| = 3^7, |A_i \cap A_j| = 2^7, |A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^7 = 1.$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_4| = 4 \cdot 3^7 - \binom{4}{2} \cdot 2^7 + \binom{4}{3} \cdot 1 - 0 = 7.984.$$

**Απάντηση:**  $16.384 - 7.984 = 8.400$

## Άσκηση 1- Εναλλακτική λύση (?)

**Υποθ. 1.** 7 ημέρες , καθεμία αντιστοιχεί σε 1 μάθημα

**Υποθ. 2.** 4 μαθήματα, πρέπει να μελετηθούν όλα.

- Πόσα Προγράμματα Μελέτης υπάρχουν;

Άλλη απόπειρα:

1. Διάλεξε 4 από τις ημέρες  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  για να προγραμματίσεις τα μαθήματα  $A, B, C, D$  σε σειρά:  $P(7, 4)$  τρόποι
2. Διάλεξε 3 μαθήματα για τις υπόλοιπες 3 ημέρες:  $4^3$  τρόποι.

Συνολικά  $P(7, 4) \cdot 4^3 = 53.760$  τρόποι (?)



# Άσκηση 1- Εναλλακτική λύση (?)

**Υποθ. 1.** 7 ημέρες , καθεμία αντιστοιχεί σε 1 μάθημα

**Υποθ. 2.** 4 μαθήματα, πρέπει να μελετηθούν όλα.

- Πόσα Προγράμματα Μελέτης υπάρχουν;

Άλλη απόπειρα:

1. Διάλεξε 4 από τις ημέρες  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  για να προγραμματίσεις τα μαθήματα  $A, B, C, D$  σε σειρά:  $P(7, 4)$  τρόποι
2. Διάλεξε 3 μαθήματα για τις υπόλοιπες 3 ημέρες:  $4^3$  τρόποι.

Συνολικά  $P(7, 4) \cdot 4^3 = 53.760$  τρόποι (?)

**ΛΑΘΟΣ !** Προγράμματα όπως το  $[\langle 1, 2, 5, 7 \rangle, \langle A, B, C \rangle]$  μετρούνται πάνω από μία φορά, π.χ.:  $[\langle 3, 4, 6, 7 \rangle, \langle A, B, C \rangle]$ .

# Λάθος κανόνας γινομένου

Το λάθος που παρουσιάζει ο προηγούμενος συλλογισμός είναι ότι μετράμε ζεύγη της μορφής

$$[\langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle, \langle X, Y, Z \rangle]$$

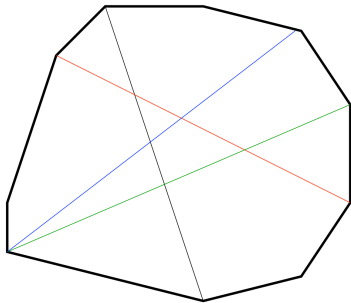
όπου  $[\langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle]$  μετάθεση μήκους 4 από 7 στοιχεία και  $[\langle X, Y, Z \rangle]$  μετάθεση μήκους 3 από 7 στοιχεία με επανάληψη.

Το πρόβλημα είναι ότι υποθέτει πως υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τέτοιων ζευγών και προγραμμάτων. Στην πραγματικότητα (όπως είδαμε με το αντιπαράδειγμα) τα ζεύγη είναι πολύ περισσότερα.

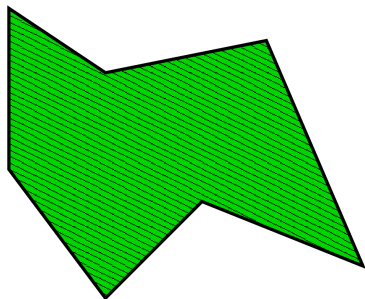
# Κυρτότητα

## Ορισμός 1.

*Ένα αντικείμενο  $A$  λέγεται κυρτό εάν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει 2 σημεία του  $A$  κείται ολόκληρο στο εσωτερικό του αντικειμένου.*



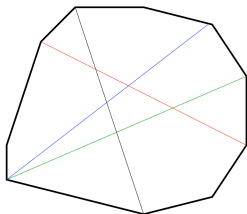
Κυρτό



Μη-κυρτό

## Ασκηση 2

- Κυρτό 10-γωνο στο επίπεδο.
- διαγώνιοι σε "γενική" θέση δηλ.  $\forall$  τριάδα δεν τέμνεται
- ▶ Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται πάνω στις διαγωνίους;



$\binom{10}{2}$  τμήματα μεταξύ δύο  
κορυφών=  $45 - (10 \text{ ακμές}) = 35$   
διαγώνιοι.

Υπολογίζουμε τον αριθμό εσωτερικών σημείων τομής για ένα ζεύγος διαγωνίων: ζεύγη διαγωνίων που τέμνονται σε κορυφή δεν ορίζουν τομή.

## Άσκηση 2 (συνέχεια)

Σε κάθε τετράδα κορυφών αντιστοιχίζεται ένα διαφορετικό σημείο τομής και αντιστρόφως (γιατί;).

Άρα  $\binom{10}{4} = 210$  τομές (στις 35 διαγωνίους).

Εστω  $k_i$  τομές στην  $i$ -οστή διαγώνιο: ορίζουν  $k_i + 1$  τμήματα.

$$\begin{aligned}\text{Αριθμός τμημάτων} &= \sum_{i=1}^{35} (k_i + 1) = \sum_{i=1}^{35} k_i + 35 = \\ &= 2 \cdot 210 + 35 = 420 + 35 = 455,\end{aligned}$$

όπου κάθε σημείο τομής ανήκει σε **2 ακριβώς** διαγωνίους.



## Άσκηση 3

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται  $\kappa$  κόκκινες και  $\lambda$  λευκές μπάλες σε  $n$  αριθμημένα κουτιά, ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μια κόκκινη και μία λευκή μπάλα;

► Υποθέτουμε πως  $\kappa \geq n$ ,  $\lambda \geq n$ , αλλιώς η απάντηση είναι 0.

► Με 1 τρόπο τοποθετώ  $n$  κόκκινες και  $n$  λευκές μπάλες.

► Απομένουν  $\kappa - n$  κόκκινες και  $\lambda - n$  λευκές μπάλες, που τοποθετούνται αυθαίρετα, άρα πλήθος τοποθετήσεων =

$$= \binom{n + (\kappa - n) - 1}{\kappa - n} \binom{n + (\lambda - n) - 1}{\lambda - n} = \binom{\kappa - 1}{\kappa - n} \binom{\lambda - 1}{\lambda - n}$$

Ισοδύναμα: τοποθετούνται  $\kappa$  **κόκκινες** μπάλες στα  $n$  κουτιά με  $\geq 1$  μπάλα άνα κουτί και ομοίως οι λευκές. ► combin

$$\binom{\kappa - 1}{\kappa - n} \binom{\lambda - 1}{\lambda - n}$$



## Ασκηση 4

1. Με πόσους τρόπους διατάσσονται τα 8 γράμματα  $a, b, c, d, e, f, g, h$  ώστε το  $a$  να βρίσκεται αριστερά του  $b$  και το  $b$  αριστερά του  $c$ ;

Η διάταξη  $-a - b - c-$  ορίζει  $n = 4$  κουτιά όπου τοποθετούμε, διατεταγμένα, τα υπόλοιπα  $r = 5$  γράμματα. Για το  $d$  έχουμε 4 επιλογές, για το  $e$  έχουμε 5 κοκ, άρα  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$  διατάξεις.

## Ασκηση 4

1. Με πόσους τρόπους διατάσσονται τα 8 γράμματα  $a, b, c, d, e, f, g, h$  ώστε το  $a$  να βρίσκεται αριστερά του  $b$  και το  $b$  αριστερά του  $c$ ;

Η διάταξη  $-a - b - c-$  ορίζει  $n = 4$  κουτιά όπου τοποθετούμε, διατεταγμένα, τα υπόλοιπα  $r = 5$  γράμματα. Για το  $d$  έχουμε 4 επιλογές, για το  $e$  έχουμε 5 κοκ, άρα  $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$  διατάξεις.

2.  $r$  διαφορετικές μπάλες τοποθετούνται σε  $n$  διαφορετικά κουτιά. Σε κάθε κουτί οι μπάλες βρίσκονται σε μια σειρά. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;

Οταν έχουμε τοποθετήσει  $k$  μπάλες, υπάρχουν  $n + k$  τρόποι να τοποθετήσουμε την επόμενη, άρα

$$n(n+1) \cdots (n+r-2)(n+r-1).$$





## Άσκηση 5

Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με 000 ή τελειώνουν σε 1111;

## Άσκηση 5

Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με 000 ή τελειώνουν σε 1111;

**Απάντηση.**

- ▶ Υπάρχουν  $2^7$  συμβολοσειρές που ξεκινούν με 000 αφού σε καθεμιά από τις 7 τελευταίες θέσεις μπορεί να υπάρχει 0 ή 1.
- ▶ Ομοίως, υπάρχουν  $2^6$  συμβολοσειρές που τελειώνουν σε 1111, και
- ▶ υπάρχουν  $2^3$  συμβολοσειρές που ξεκινούν με 000 και τελειώνουν σε 1111 (αφού μόνο οι 3 ενδιάμεσες θέσεις μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα)

Οπότε από την αρχή εγκλεισμού/αποκλεισμού η απάντηση είναι  $2^7 + 2^6 - 2^3 = 184$ . □

## Ασκηση 6

Αν  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k > 1$ , τότε σε κάθε σύνολο  $n + 1$  θετικών ακεραίων  $\leq kn$  πρέπει να υπάρχουν  $\geq 2$  αριθμοί με διαφορά  $< k$ .

## Ασκηση 6

Αν  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k > 1$ , τότε σε κάθε σύνολο  $n + 1$  θετικών ακεραίων  $\leq kn$  πρέπει να υπάρχουν  $\geq 2$  αριθμοί με διαφορά  $< k$ .

**Απάντηση.**

Διαμερίζουμε το σύνολο  $\{1, 2, \dots, kn\}$  σε  $n$  "περιστεροφωλιές":

$\{1, 2, \dots, k\},$

$\{k + 1, k + 2, \dots, 2k\},$

$\dots$

$\{2n - k + 1, 2n - k + 2, \dots, 2n\}.$

Αν έχουμε  $n + 1$  αριθμούς (περιστέρια) από αυτό το σύνολο, πρέπει 2 από αυτούς να βρεθούν στην ίδια "φωλιά". □

## Άσκηση 7

Εστω  $S$  ένα σύνολο  $n$  στοιχείων. Πόσα διατεταγμένα ζεύγη  $(A, B)$  υπάρχουν τ.ω.  $A \subseteq S$ ,  $B \subseteq S$  και  $A \subseteq B$ ;

## Άσκηση 7

Εστω  $S$  ένα σύνολο  $n$  στοιχείων. Πόσα διατεταγμένα ζεύγη  $(A, B)$  υπάρχουν τ.ω.  $A \subseteq S$ ,  $B \subseteq S$  και  $A \subseteq B$ ;

**Απάντηση.**

Κάθε στοιχείο του  $S$  ανήκει σε μία ακριβώς από τις εξής 3 κατηγορίες: είτε είναι στοιχείο του  $A$ , είτε είναι στοιχείο του  $B$  αλλά όχι του  $A$ , είτε δεν ανήκει στο  $B$ .

Οπότε οι τρόποι να επιλέξουμε τα σύνολα  $A$  και  $B$  ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες είναι όσοι και οι τρόποι να τοποθετήσουμε κάθε στοιχείο του  $S$  σε μία από αυτές τις κατηγορίες. Άρα  $3^n$ . □