

Τεχνικές απαρίθμησης

Ιωάννης Εμίρης
Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
ΕΚΠΑ

Οκτ.-Νοέμ. 2025

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερων [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερωνα [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

Εισαγωγή

- ▶ Πολλά προβλήματα απαρίθμησης δεν λύνονται μόνο με τα εργαλεία από τις μεταθέσεις και συνδυασμούς.
- ▶ Οι γενικές τεχνικές απαρίθμησης δίνουν τη λύση.

Ορισμός.

***Πείραμα:** Μια διαδικασία με συγκεκριμένο (αριθμήσιμο) σύνολο δυνατών / παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.*

- ▶ Θέλουμε να απαριθμήσουμε το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος.
- ▶ Μετράμε δηλαδή αντικείμενα με ορισμένες ιδιότητες.
- ▶ Σημαντικό κομμάτι των Διακριτών Μαθηματικών.

Εφαρμογές

- ✓ Πολυπλοκότητα αλγορίθμων
- ✓ Τηλεφωνικοί αριθμοί
- ✓ Πλήθος I.P.'s
- ✓ Τεχνικές αλληλούχησης DNA
- ♣ Τυχερά παιχνίδια.

Ένα παράδειγμα

- ▶ password υπολογιστή με 6, 7 ή 8 χαρακτήρες
- ▶ Χαρακτήρες: γράμματα ή ψηφία.
- ▶ Υποχρεωτικά ένα αριθμητικό ψηφίο

Πόσα password (συνθηματικά) υπάρχουν;
Θα απαντηθεί παρακάτω.

Ο κανόνας του γινομένου

Ξεκινάμε με κάποιες βασικές αρχές αρίθμησης:

Κανόνας του γινομένου

Εστω ότι μια διαδικασία διαχωρίζεται σε μια ακολουθία δύο εργασιών.

Αν υπάρχουν n_1 τρόποι να γίνει η πρώτη εργασία και για κάθε έναν από αυτούς, υπάρχουν n_2 τρόποι να γίνει η δεύτερη, τότε υπάρχουν συνολικά $n_1 n_2$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας.

→ Ο κανόνας του γινομένου επεκτείνεται στις περιπτώσεις όπου μια διαδικασία μπορεί να διασπαστεί σε k εργασίες, οπότε το σύνολο των τρόπων εκτέλεσης είναι

$$n_1 n_2 \cdots n_k.$$

Ο κανόνας του γινομένου

Παράδειγμα 1.

Πόσα πιθανά αποτελέσματα υπάρχουν μετά την ρίψη 2 ζαριών;

Απάντηση: Κάθε 2 ζάρι μπορεί να έχει 6 διαφορετικά αποτελέσματα, οπότε $n_1 = n_2 = 6 \Rightarrow 36$ αποτελέσματα.

Παράδειγμα 2.

Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές bit υπάρχουν με μήκος 9;

Απάντηση: Κάθε bit μπορεί να έχει τιμή 0 ή 1, οπότε $n_i = 2$. Άρα $2^9 = 512$ διαφορετικές συμβολοσειρές.

Ο κανόνας του γινομένου

Παράδειγμα 3.

Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων μπορούν να υπάρξουν με 3 ελληνικά γράμματα και 4 αριθμούς ;

Απάντηση: Αν χρησιμοποιούνται τα 24 γράμματα και οι 10 αριθμοί χωρίς περιορισμό στην επιλογή τους, τότε υπάρχουν $24^3 10^4 = 138.240.000$ συνδυασμοί.

Παράδειγμα 4.

Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις από σύνολο A , n στοιχείων, σε σύνολο B , k στοιχείων, μπορούν να κατασκευαστούν;

Απάντηση: Μια συνάρτηση αντιστοιχεί στην επιλογή ενός από τα στοιχεία του B για κάθε (διακριτό) στοιχείο του A . Υπάρχουν συνολικά k^n συναρτήσεις της μορφής $f : A \rightarrow B$.

Πληθικότητα δυναμοσυνόλου

Έστω πεπερασμένο σύνολο S .

Αντιστοιχούμε κάθε υποσύνολο του S σε μια μοναδική συμβολοσειρά bit μήκους $|S|$ ως εξής. Κάθε στοιχείο του S αντιστοιχεί σε ένα bit: 1, αν το στοιχείο βρίσκεται στο υποσύνολο, 0 αν όχι.

Κάθε συμβολοσειρά είναι ουσιαστικά μια συνάρτηση $S \rightarrow \{0, 1\}$, και υπάρχουν $2^{|S|}$ τέτοιες συναρτήσεις.

Αρα υπάρχουν $|P(S)| = 2^{|S|}$ υποσύνολα του S διότι υπάρχουν τόσες συμβολοσειρές μήκους $|S|$.

Π.χ. $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $|P(S)| = 2^3 = 8$.

Συνολοθεωρητική έκφραση

Εστω τα πεπερασμένα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_m$. Αν κάθε πείραμα έχει αποτελέσματα $A_1, \dots, A_m$ και το συνολικό αποτέλεσμα ορίζεται από ένα στοιχείο σε κάθε A_i , τότε αντιστοιχεί στο καρτεσιανό γινόμενο

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m = \{(a_1, \dots, a_m) : a_i \in A_i\}.$$

Ξέρουμε πως το πλήθος των στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου ισούται με το γινόμενο των πληθικοτήτων του κάθε συνόλου

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m|$$

Ο κανόνας του αθροίσματος

Κανόνας του αθροίσματος

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει **είτε** με n_1 τρόπους **είτε** με n_2 τρόπους, έτσι ώστε κανένα στοιχείο των πρώτων να μην περιέχεται στους δεύτερους (αποκλειστική διάζευξη), τότε υπάρχουν συνολικά $n_1 + n_2$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας.

Ο κανόνας του αθροίσματος

Παράδειγμα 5.

- ▶ 2 λίστες για απαλλακτικές εργασίες
- ▶ 18 βιβλιογραφικές εργασίες, 35 ανάπτυξης κώδικα

Πόσες επιλογές έχει κάθε φοιτητής;

Απάντηση: Οι επιλογές είναι $18 + 35 = 53$.

Ο κανόνας του αθροίσματος

Η συνολοθεωρητική διατύπωση του κανόνα του αθροίσματος αφορά στην ένωση συνόλων που είναι **ανά δύο ξένα** μεταξύ τους:

$$|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| \cdots + |A_m|, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j.$$

Η παραπάνω έκφραση αποτελεί **διαμέριση** της ένωσης $\bigcup_{i=1}^m A_i$.

Διαφορές αθροίσματος-γινομένου

Παράδειγμα 6.

15 μπάλες = 7 μονόχρωμες + 7 δίχρωμες + 1 μαύρη.

(Γινόμενο)

$\#(\text{Επιλογών μίας μονόχρωμης και μίας δίχρωμης}) = 7 \cdot 7 = 49.$

(Αθροισμα)

$\#(\text{Επιλογών μπάλας εκτός της μαύρης}) = 7 + 7 = 14.$

Διαφορές αθροίσματος-γινομένου

Ο κανόνας του γινομένου εφαρμόζεται αν γίνουν **και τα δύο** πειράματα.

Από την άλλη, εφαρμόζουμε τον κανόνα του αθροίσματος εάν γίνει **ακριβώς ένα εκ των 2 πειραμάτων**, δηλ. είτε το πρώτο πείραμα είτε το δεύτερο.

Ο κανόνας του αθροίσματος ή αυτός του γινομένου πολλές φορές δεν αρκεί για να λύσουν ένα πρόβλημα απαρίθμησης. Ο συνδυασμός τους όμως μπορεί να δώσει τη λύση.

Λύση του παραδείγματος password [Rosen]

- ▶ password (συνθηματικό) με 6, 7 ή 8 χαρακτήρες
- ▶ Χαρακτήρες: αγγλικά γράμματα ή ψηφία.
- ▶ Υποχρεωτικά ένα αριθμητικό ψηφίο

Απάντηση: Έστω P το συνολικό πλήθος αποδεκτών συνθηματικών και $P_i =$ πλήθος αποδεκτών συνθηματικών με $i = 6, 7, 8$ αγγλικούς χαρακτήρες αντίστοιχα, όχι μόνο γράμματα:

- ✓ Κανόνας αθροίσματος $\Rightarrow P = P_6 + P_7 + P_8$.

Εστω p_i το πλήθος των συνθηματικών με i γράμματα και αριθμούς, ℓ_i το πλήθος των συνθηματικών με i γράμματα.

- ✓ Κανόνας αθροίσματος: $p_i = P_i + \ell_i \Rightarrow P_i = p_i - \ell_i$.
- ✓ Κανόνας γινομένου: $p_i = 36^i$, $\ell_i = 26^i$.

Ο κανόνας της διαίρεσης

Ο κανόνας της διαίρεσης

Υπάρχουν n/d διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος που εκτελείται δυνητικά με n αποτελέσματα, αλλά κάθε d από αυτά είναι ίδια.

Συνολοθεωρητικά έχουμε, για $n = |A|$ δυνητικά αποτελέσματα και κάποιο άγνωστο k διακριτών αποτελεσμάτων, την εξής διαμέριση:

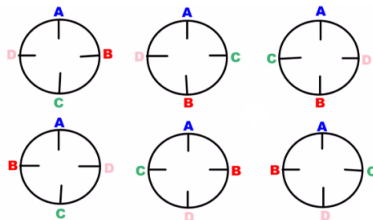
$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j,$$

όπου $|A_1| = \cdots = |A_k| = d$, συνεπώς $k = |A|/d = n/d$.

Ροτόντα: πρόβλημα

Παράδειγμα 7.

Με πόσους τρόπους κάθονται σε ροτόντα 4 άτομα, θεωρώντας 2 τρόπους ίδιους αν καθένας έχει δεξιά κι αριστερά ίδιους γείτονες;



Πρόκειται για το ίδιο αποτέλεσμα αν μετακινηθούν όλοι κατά μία θέση στην ίδια φορά π.χ. αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

Παρατηρώ πως υπάρχουν $4!$ διατάξεις αν οριστεί κάποια θέση ως 1η και καθίσουν τα άτομα σε ορισμένη φορά.

Ροτόντα: Λύση

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους κάθονται σε ροτόντα 4 άτομα, θεωρώντας 2 τρόπους ίδιους αν καθένας έχει δεξιά κι αριστερά ίδιους γείτονες;

Κανόνας διαίρεσης: $A =$ όλοι οι τρόποι καθίσματος. $A_i =$ τρόποι να καθίσουν σε συγκεκριμένη σειρά (και μετακινούμενοι μέχρι 3 θέσεις): $|A_i| = 4 = d$. Ζητείται το πλήθος k των A_i :

$$|A| = |\cup_{i=1}^k A_i| = 4! = kd \Rightarrow k = 3!$$

Ροτόντα: Λύση

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους κάθονται σε ροτόντα 4 άτομα, θεωρώντας 2 τρόπους ίδιους αν καθένας έχει δεξιά κι αριστερά ίδιους γείτονες;

Κανόνας διαίρεσης: $A =$ όλοι οι τρόποι καθίσματος. $A_i =$ τρόποι να καθίσουν σε συγκεκριμένη σειρά (και μετακινούμενοι μέχρι 3 θέσεις): $|A_i| = 4 = d$. Ζητείται το πλήθος k των A_i :

$$|A| = |\cup_{i=1}^k A_i| = 4! = kd \Rightarrow k = 3!$$

Β' μέθοδος: Η θέση του 1ου ατόμου ορίζεται αυθαίρετα. Τα υπόλοιπα 3 άτομα διατάσσονται με $3!$ τρόπους, αφού οριστεί η φορά της διάταξης. Άρα συνολικά $3!$ τρόποι καθίσματος.

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερωνα [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

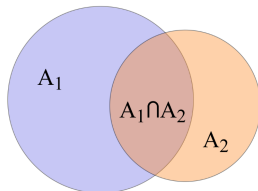
Ο κανόνας της αφαίρεσης

Κανόνας της αφαίρεσης

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους είτε με n_2 τρόπους, έτσι ώστε k στοιχεία των πρώτων να περιέχονται στους δεύτερους, τότε υπάρχουν συνολικά $n_1 + n_2 - k$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας.

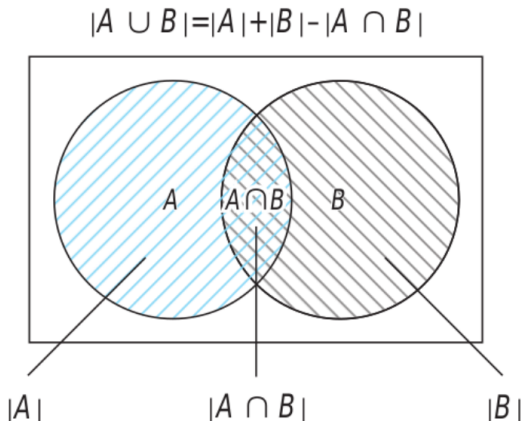
Ο κανόνας της αφαίρεσης έχει το συνολοθεωρητικό του ανάλογο στην αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



Απαρίθμηση ένωσης

- ▶ Η αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού χρησιμοποιείται στην απαρίθμηση ενώσεων συνόλων ή ενδεχομένων.
- ▶ Η περίπτωση των 2 ενδεχομένων είναι η πιο γνωστή:



Ένωση δύο ενδεχομένων

Παράδειγμα 8.

Από τους φοιτητές του 1ου έτους, 81 παρακολουθούν το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών, 53 το μάθημα του Προγραμματισμού, ενώ αμφότερα μαθήματα παρακολουθούν 43 φοιτητές. Πόσοι είναι οι πρωτοετείς ?

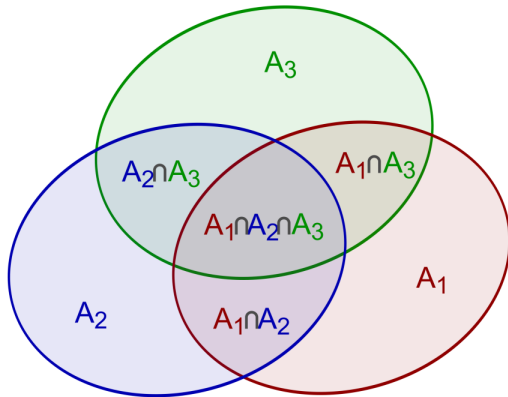
Έχουμε ως προς την παρακολούθηση των μαθημάτων:

$$\begin{aligned} |A| &= 81, |B| = 53, |A \cap B| = 43 \Rightarrow \\ \Rightarrow |A \cup B| &= (81 + 53) - 43 = 91. \end{aligned}$$

Ένωση 3 συνόλων

Στην περίπτωση 3 ενδεχομένων ξέρουμε ότι:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$



Ένωση 4 συνόλων

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

Γενικευμένη Αρχή εγκλεισμού / αποκλεισμού

Θεώρημα. Για πεπερασμένα $A_1, \dots, A_n$, $[n] := \{1, \dots, n\}$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| =$$

$$\begin{aligned} &= |A_1| + \dots + |A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots \\ &\quad \vdots \\ &- (-1)^k \sum_{J \subset [n] \text{ \& } |J|=k} |\bigcap_{j \in J} A_j| \\ &\quad \vdots \\ &- (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n| = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερωνα [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

Παράδειγμα Ι

Πόσοι θετικοί φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1000 δεν είναι πολλαπλάσια του 2, του 3 ούτε του 5;

Παράδειγμα I

Πόσοι θετικοί φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1000 δεν είναι πολλαπλάσια του 2, του 3 ούτε του 5;

Απάντηση:

Για τους φυσικούς $1, \dots, 999$ ορίζουμε σύνολα:

$$A_1 = \{\text{πολλαπλάσια του 2}\} : |A_1| = \lfloor 999/2 \rfloor = 499,$$

$$A_2 = \{\text{πολλαπλάσια του 3}\} : |A_2| = \lfloor 999/3 \rfloor = 333,$$

$$A_3 = \{\text{πολλαπλάσια του 5}\} : |A_3| = \lfloor 999/5 \rfloor = 199,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 999/(2 \cdot 3) \rfloor = 166, \quad |A_2 \cap A_3| = \lfloor 999/(3 \cdot 5) \rfloor = 66,$$

$$|A_1 \cap A_3| = \lfloor 999/10 \rfloor = 99, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 999/30 \rfloor = 33.$$

Το σύνολο των φυσικών που **είναι πολλαπλάσια τουλάχιστον ενός από τα 2, 3, 5** έχει πληθάρημο:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$$

οπότε η λύση είναι $999 - 733 = 266$ αριθμοί.

Εφαρμογή εγκλεισμού-αποκλεισμού [Rosen 8.6]

- ▶ Το προηγούμενο πρόβλημα αφορούσε ιδιότητες $P_1, \dots, P_n$ όπου A_i τα σύνολα στοιχείων που ικανοποιούν τις ιδιότητες.
- ▶ Θέτουμε $N(P_{i_1} \cdots P_{i_k}) = |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ το πλήθος των στοιχείων που ικανοποιούν τις αντίστοιχες ιδιότητες.
- ▶ Το πλήθος των στοιχείων που δεν ικανοποιούν καμία ιδιότητα εκ των $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ είναι $N(P'_{i_1} \cdots P'_{i_k}) = N - |A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}|$, όπου N το συνολικό πλήθος στοιχείων.

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } N(P'_1 \cdots P'_n) &= N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i P_j) \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \\ 2 \leq k \leq n}} (-1)^{k+1} N(P_{i_1} \cdots P_{i_k}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα II

Πόσοι θετικοί ακέραιοι ως το 50 δεν διαιρούνται από τους 4 μικρότερους πρώτους αριθμούς;

Παράδειγμα II

Πόσοι θετικοί ακέραιοι ως το 50 δεν διαιρούνται από τους 4 μικρότερους πρώτους αριθμούς;

Απάντηση: $P_1 = \{m \leq 50 : 2|m\}$, $P_2 = \{m \leq 50 : 3|m\}$,
 $P_3 = \{m \leq 50 : 5|m\}$, $P_4 = \{m \leq 50 : 7|m\}$.

$N(P_1) = 25$, $N(P_2) = \lfloor 50/3 \rfloor = 16$, $N(P_3) = 10$, $N(P_4) = 7$,
 $N(P_1P_2) = 8$, $N(P_1P_3) = 5$, $N(P_1P_4) = 3$,
 $N(P_2P_3) = 3$, $N(P_2P_4) = 2$, $N(P_3P_4) = 1$,
 $N(P_1P_2P_3) = 1$, $N(P_1P_2P_4) = 1$, $N(P_2P_3P_4) = 0$,
 $N(P_1P_3P_4) = 0$ και $N(P_1P_2P_3P_4) = 0$.

Συνολικά: $N(P'_1P'_2P'_3P'_4) = 50 -$
 $-(25 + 16 + 10 + 7) + (8 + 5 + 3 + 3 + 2 + 1) - (1 + 1 + 0 + 0) + 0 =$
 12 .

Άσκηση: Απαριθμήστε τους.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη

- ▶ Μια αρχαία και αποδοτική μέθοδος για να ελέγξουμε αν ένας δεδομένος ακέραιος N είναι πρώτος.
- ▶ Για να είναι ο N σύνθετος, πρέπει να διαιρείται από τουλάχιστον έναν πρώτο που είναι $\leq \sqrt{N}$.
- ▶ Εφαρμόζοντας εγκλεισμό-αποκλεισμό μπορούμε γρήγορα να βρούμε το πλήθος των πρώτων (και αντίστοιχα των σύνθετων) αριθμών μικρότερων από $\sqrt{N}$.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη (Παράδειγμα)

- ▶ Για να ελέγξουμε αριθμούς μέχρι το 50, αρκεί να βρούμε τους αριθμούς που διαιρούνται με τους 4 μικρότερους πρώτους, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα διότι ο αμέσως μεγαλύτερος πρώτος, το 11, υπερβαίνει το $\sqrt{50}$.
- ▶ Βρήκαμε $N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = 12$.
- ▶ Επίσης οι αριθμοί 2,3,5,7 είναι πρώτοι, ενώ ο 1 μετρήθηκε αλλά δεν θεωρείται πρώτος.
- ▶ Άρα το σύνολο των πρώτων αριθμών που δεν υπερβαίνουν το 50 είναι $4 + N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) - 1 = 15$.

Απαριθμώντας της συναρτήσεις "επί": παράδειγμα

Παράδειγμα 9.

Πόσες επί συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ υπάρχουν εάν $|A| = 6$ και $|B| = 3$;

Απάντηση: Έστω b_1, b_2, b_3 τα τρία στοιχεία του συνόλου B .
Θέτουμε την ιδιότητα $P_i = \{ \text{η εικόνα της } f \text{ δεν περιέχει το } b_i \}$.
Συνολικά υπάρχουν 3^6 συναρτήσεις f (γιατί?)

Έχουμε $N(P_i) = 2^6$, $i = 1, 2, 3$ (2 επιλογές για 6 στοιχεία).

Εφόσον $i \neq j$, τότε $N(P_i P_j) = 1^6$ (1 επιλογή για 6 στοιχεία).

Οι δυνατοί συνδυασμοί $\{P_i, P_j\}$ είναι 3.

Συνολικά: $N(P'_1 P'_2 P'_3) = 3^6 - [3N(P_i) - 3N(P_i P_j) + N(P_1 P_2 P_3)] =$
 $3^6 - (3 \cdot 2^6 - 3 \cdot 1^6 + 0) = 540$.

Απαριθμώντας της συναρτήσεις επί

Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται για το πλήθος των συναρτήσεων επί από σύνολα m στοιχείων σε σύνολα n στοιχείων.

Βρείτε τη γενίκευση, και καθορίσετε ποια είναι η σχέση μεταξύ των m, n για να υπάρχουν συναρτήσεις επί.

Απαριθμώντας της συναρτήσεις επί

Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται για το πλήθος των συναρτήσεων επί από σύνολα m στοιχείων σε σύνολα n στοιχείων.

Βρείτε τη γενίκευση, και καθορίσετε ποια είναι η σχέση μεταξύ των m, n για να υπάρχουν συναρτήσεις επί.

Πρέπει $m \geq n$, τότε το πλήθος συναρτήσεων επί είναι:

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m + \cdots + (-1)^{n-1} C(n, n-1)1^m,$$

όπου $C(a, b) = a!/(b!(a-b)!)$ είναι οι τρόποι επιλογής b αντικειμένων από a , π.χ. $C(a, 1) = C(a, a-1) = a$.

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερωνα [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

Διαταράξεις

Ορισμός 1.

Διατάραξη ονομάζουμε μια μετάθεση (permutation, διάταξη) που δεν αφήνει κανένα αντικείμενο στην αρχική του θέση.

Συμβολίζουμε το πλήθος των διαταράξεων n στοιχείων με D_n (derangments).

Παράδειγμα 10.

Πόσες είναι οι μεταθέσεις 3 στοιχείων και ποιές είναι διαταράξεις ;

Διαταράξεις

Ορισμός 1.

Διατάραξη ονομάζουμε μια μετάθεση (permutation, διάταξη) που δεν αφήνει κανένα αντικείμενο στην αρχική του θέση.

Συμβολίζουμε το πλήθος των διαταράξεων n στοιχείων με D_n (derangments).

Παράδειγμα 10.

Πόσες είναι οι μεταθέσεις 3 στοιχείων και ποιές είναι διαταράξεις ;
 $3!$

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

Όχι Διαταράξεις Διαταράξεις

Διαταράξεις

Θεώρημα 1.

Το πλήθος των διαταράξεων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Απόδειξη.

- ▶ Θέτουμε $P_i = \{\text{Το στοιχείο } i \text{ παρέμεινε στην θέση του}\}$,
- ▶ Θέλουμε $N(P'_1 P'_2 \cdots P'_n)$: κανένα στοιχείο στην θέση του.
- ▶ Παρατηρούμε $N(P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_m}) = (n - m)!$ για $m \leq n$.



(συνεχίζεται)

Διαταράξεις (συνέχεια απόδειξης)

► Το πλήθος επιλογών m δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_m$ είναι $C(n, m)$.

► Άρα $D_n =$

$$= n! - C(n, 1)(n-1)! + C(n, 2)(n-2)! - \dots + (-1)^n C(n, n)0! =$$

$$= n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C(n, k)(n-k)! = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Διαταράξεις και πιθανότητα

Παράδειγμα 11.

Ένας εργαζόμενος δεν αριθμεί σωστά τα καπέλα των πελατών ενός εστιατορίου με αποτέλεσμα κάθε φορά να δίνει τυχαία κάποιο καπέλο σε κάθε πελάτη που φεύγει. Ποια η πιθανότητα να μην δώσει κανένα καπέλο σωστά;

- ▶ Εφαρμογή των διαταράξεων στην θεωρία πιθανοτήτων.
- ▶ D_n διαταράξεις σε σύνολο $n!$ μεταθέσεων
- ▶ $P(\{\text{κανένα σωστό καπέλο}\}) = D_n/n!$

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερωνα [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

Η αρχή του περιστρώνα

- 10 περιστεριά με 9 διαθέσιμες φωλιές.
- Αρα μία τουλάχιστον φωλιά θα έχει > 1 περιστέρια.



Η αρχή του περιστερώνα

Θεώρημα 2 (Η αρχή του περιστερώνα).

Εστω k ένας θετικός ακέραιος. Εάν θέλουμε να τοποθετήσουμε $n \geq k + 1$ αντικείμενα σε k κουτιά, τότε τουλάχιστον ένα κουτί θα περιέχει περισσότερα από ένα αντικείμενα.

Η αρχή του περιστερώνα

Η αρχή του περιστερώνα, αν και φαινομενικά απλή, μπορεί να δώσει κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα:

Πόρισμα 1.

Μια συνάρτηση f από ένα σύνολο με $n \geq k + 1$ στοιχεία σε ένα σύνολο με k στοιχεία δεν είναι ποτέ 1 προς 1.

Η αρχή του περιστερώνα

Παράδειγμα 12.

Ανάμεσα σε 367 ανθρώπους τουλάχιστον 2 έχουν γενέθλια την ίδια μέρα.

Παράδειγμα 13.

Πόσους φοιτητές πρέπει να έχει μία τάξη ώστε τουλάχιστον 2 να έχουν ίδιο βαθμό αν η βαθμολόγηση είναι από το 0 έως το 10 και επιτρέπονται ακέραιοι και τα μισά τους;

Η αρχή του περιστερώνα

Παράδειγμα 12.

Ανάμεσα σε 367 ανθρώπους τουλάχιστον 2 έχουν γενέθλια την ίδια μέρα.

Παράδειγμα 13.

Πόσους φοιτητές πρέπει να έχει μία τάξη ώστε τουλάχιστον 2 να έχουν ίδιο βαθμό αν η βαθμολόγηση είναι από το 0 έως το 10 και επιτρέπονται ακέραιοι και τα μισά τους;

Απάντηση: 22 φοιτητές.

Εφαρμογές

Παράδειγμα 14.

- ▶ 30 ημέρες αγώνων για μια ομάδα,
- ▶ ≥ 1 αγώνες την ημέρα, ≤ 45 αγώνες συνολικά.

Δείξτε ότι υπάρχει μια περίοδος συνεχόμενων ημερών που η ομάδα παίζει ακριβώς 14 αγώνες.

Απάντηση:

- $a_j =$ πλήθος παιχνιδιών ως και τη μέρα $j = 1, \dots, 30$.
- $b_j = a_j + 14$ (αμφοτέρως αυστηρώς αύξουσες)
- 60 θετικοί όροι συνολικά, όπου $b_{30} \leq 59$.
- αρχή περιστρώνα $\Rightarrow$ δύο ίσοι όροι, όμως όχι ίδιας ακολουθίας, άρα $a_k = b_j = a_j + 14$, για κάποια $k > j$.

Η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα

Θεώρημα 3 (Η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα).

Αν τοποθετήσουμε N αντικείμενα σε k κουτιά, τότε ένα τουλάχιστον κουτί θα περιέχει τουλάχιστον $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ αντικείμενα.

Παράδειγμα 15.

Πόσα χαρτιά πρέπει να τραβήξουμε από μια τράπουλα 52 φύλλων, ώστε τουλάχιστον 3 να έχουν το ίδιο σύμβολο;

Η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα

Θεώρημα 3 (Η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα).

Αν τοποθετήσουμε N αντικείμενα σε k κουτιά, τότε ένα τουλάχιστον κουτί θα περιέχει τουλάχιστον $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ αντικείμενα.

Παράδειγμα 15.

Πόσα χαρτιά πρέπει να τραβήξουμε από μια τράπουλα 52 φύλλων, ώστε τουλάχιστον 3 να έχουν το ίδιο σύμβολο;

Απάντηση: Θεωρήστε $k = 4$ κουτιά. Τοποθετώντας N χαρτιά σε αυτά, πρέπει $\lceil N/4 \rceil \geq 3$. Άρα $N \geq 9$.

Εναλλακτικά $N \geq 4 \cdot 2 + 1 = 9$.

Θεωρία Ramsey

Παράδειγμα 16 (Rosen, Παράδ. 9).

Σε σύνολο 6 ατόμων, κάθε ζεύγος αποτελείται είτε από 2 φίλους είτε 2 εχθρούς. Δείξτε πως υπάρχουν 3 αμοιβαία φίλοι (κλίκα) ή 3 αμοιβαία εχθροί.

Απάντηση: Εστω άτομο A. Οι υπόλοιποι 5 μοιράζονται σε φίλους και εχθρούς του A, άρα το ένα εκ των δύο υποσυνόλων περιέχει $\geq \lceil 5/2 \rceil = 3$ άτομα (Αρχή περιστερώνων). Τους γράφουμε B, Γ, Δ.

Εστω οι B, Γ, Δ φίλοι του A. Αν δυο εκ των B, Γ, Δ είναι φίλοι, βρέθηκαν 3 αμοιβαία φίλοι. Αλλιώς οι B, Γ, Δ είναι αμοιβαία εχθροί.

Αντίστοιχα αν οι B, Γ, Δ εχθροί του A.

Βασικές έννοιες απαρίθμησης [Rosen Κεφ. 6.1]

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός [Rosen Κεφ. 8.5]

Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού
Διαταράξεις

Η αρχή του περισσότερωνα [Rosen Κεφ. 6.2]

Ασκήσεις

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με 000 ή τελειώνουν σε 1111;

Άσκηση 1

Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 10 ξεκινούν με 000 ή τελειώνουν σε 1111;

Απάντηση.

- ▶ Υπάρχουν 2^7 συμβολοσειρές που ξεκινούν με 000 αφού σε καθεμιά από τις 7 τελευταίες θέσεις μπορεί να υπάρχει 0 ή 1.
- ▶ Ομοίως, υπάρχουν 2^6 συμβολοσειρές που τελειώνουν σε 1111, και
- ▶ υπάρχουν 2^3 συμβολοσειρές που ξεκινούν με 000 και τελειώνουν σε 1111 (αφού μόνο οι 3 ενδιάμεσες θέσεις μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα)

Οπότε από την αρχή εγκλεισμού/αποκλεισμού η απάντηση είναι $2^7 + 2^6 - 2^3 = 184$. □

Άσκηση 2

Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του Αγγλικού αλφαβήτου
δεν περιέχουν καμία από τις συμβολοσειρές `fish`, `rat`, `bird`;

Άσκηση 2

Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του Αγγλικού αλφαβήτου δεν περιέχουν καμία από τις συμβολοσειρές *fish*, *rat*, *bird*;

Απάντηση.

- ▶ Υπάρχουν $26!$ μεταθέσεις συνολικά.
- ▶ Για να βρω πόσες περιέχουν *fish*, θεωρώ τα 4 γράμματα ενωμένα σε ένα, υπολογίζω μεταθέσεις $22+1$ γραμμάτων: $23!$
- ▶ Αντίστοιχα $24!$ μεταθέσεις με *rat* και $23!$ με *bird*
- ▶ $21!$ μεταθέσεις με *fish* και *rat* μαζί: 4 γράμματα του *fish* σε ένα, 3 γράμματα του *rat* σε ένα, 19 ξεχωριστά
- ▶ Ποτέ δεν συνυπάρχουν *bird* και *rat*, ούτε *bird* και *fish*.
- ▶ Εγκλεισμός/αποκλεισμός: $26! - (23! + 24! + 23! - 21!)$.

Άσκηση 3

Σε μια ομάδα n φοιτητών έχουν καθοριστεί συγκεκριμένες θέσεις για καθεμία από 2 διαλέξεις που θα γίνουν στην ίδια αίθουσα χωρητικότητας επίσης n ατόμων. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθοριστούν αυτές οι θέσεις αν κανένας φοιτητής δεν κάθεται στην ίδια θέση και στις δύο διαλέξεις;

Άσκηση 3

Σε μια ομάδα n φοιτητών έχουν καθοριστεί συγκεκριμένες θέσεις για καθεμία από 2 διαλέξεις που θα γίνουν στην ίδια αίθουσα χωρητικότητας επίσης n ατόμων. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθοριστούν αυτές οι θέσεις αν κανένας φοιτητής δεν κάθεται στην ίδια θέση και στις δύο διαλέξεις;

Απάντηση.

- ▶ Υπάρχουν $n!$ τρόποι να κάτσουν οι φοιτητές στην 1η διάλεξη. Η καρέκλα που κάθεται ο φοιτητής k παίρνει ταμπέλα " k ".
- ▶ Στη δεύτερη διάλεξη πρέπει να γίνει μια διατάραξη σε σχέση με τις ταμπέλες της πρώτης διάλεξης, δηλαδή D_n τρόποι.
- ▶ Άρα τελικά η απάντηση είναι $n!D_n$. □

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$n! = \binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} D_1 + \binom{n}{n} D_0$$

όπου D_k ο αριθμός των διαταράξεων k αντικειμένων.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$n! = \binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} D_1 + \binom{n}{n} D_0$$

όπου D_k ο αριθμός των διαταράξεων k αντικειμένων.

Απάντηση.

► **Αριστερό μέλος:** πλήθος μεταθέσεων n αντικειμένων

► **Δεξί μέλος:** Το ίδιο!

Μειράω μεταθέσεις n αντικειμένων όπου τα k μένουν στην θέση τους ως εξής: Επιλέγω k από n αντικείμενα με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Τα υπόλοιπα τα διαταράσσω (D_{n-k} τρόποι).

Συνολικά $\binom{n}{k} D_{n-k}$ τέτοιες μεταθέσεις.

Αθροίζω για $k = 0 \dots n$.

Υπενθύμιση: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

