

Διακριτά Μαθηματικά

Γιάννης Εμίρης
Γιάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ
<http://eclass.uoa.gr/courses/D268/>

Οκτώβριος 2025

Οργάνωση και περιεχόμενα Μαθήματος

Προτασιακή Λογική, Αποδείξεις

Οργάνωση Μαθήματος

Σύγγραμμα: "Διακριτά Μαθηματικά και Εφαρμογές",
του **Kenneth Rosen**, 7η έκδοση (εκδ. Τζιόλα).



- ▶ Αμφιθέατρο: Δευτέρα και Τετάρτη 11 πμ – 1 μμ
- ▶ Φροντιστήρια (Γιάννης Χαμόδρακας).
Ξεκινούν τη 2η βδομάδα (θα ανακοινωθεί στο **eclass**):
Δευτέρα 3-5 μμ, $AM \bmod 2 = 1$,
Τετάρτη 3-5 μμ, $AM \bmod 2 = 0$.

Βαθμολόγηση

- ▶ 2 πρόοδοι με ~ 1 μήνα διαφορά μεταξύ τους
- ▶ Βαθμός Εξέτασης Φεβρουαρίου =
 $\text{Max} \{ \text{Βαθμός τελικής εξέτασης},$
 $70\% \text{Τελικής} + 15\% \text{Πρόοδος1} + 15\% \text{Πρόοδος2} \}$
- ▶ Εξέταση Σεπτεμβρίου: Ομοίως.

Τι είναι τα Διακριτά Μαθηματικά;

Είναι η μελέτη **διακριτών** μαθηματικών αντικειμένων:

- ▶ σύνολα, π.χ. $\{\alpha, \epsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega\}$,
- ▶ ακέραιοι αριθμοί και υποσύνολά τους: $\{0, 2, 4, 8, 16, \dots\}$,
- ▶ αριθμητικές συναρτήσεις: με πεδίο ορισμού τους ακεραίους,
- ▶ πρώτοι αριθμοί $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$,
- ▶ γράφοι.

Αναπαρίστανται με **απόλυτη ακρίβεια** στον Υπολογιστή!

Τι **ΔΕΝ** εξετάζουμε; Συνεχή αντικείμενα, Αριθμητική ανάλυση.

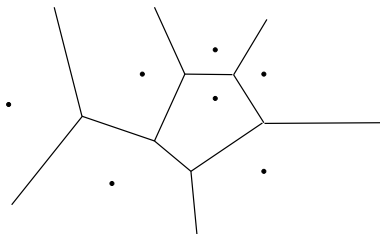
Αντιστοιχία διακριτών/συνεχών αντικειμένων

Διακριτά αντικείμενα	Συνεχή αντικείμενα
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$, ακολουθία $(0, 1, 2, 3)$	διάστημα $[0, 3]$ ή $(0, 3)$
άθροισμα $\sum_{k=0}^N k = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$	ολοκλήρωμα $\int_0^N t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big _0^N = \frac{N^2}{2}$
διακριτή πιθανότητα γεγονός $\in$ δειγματικό χώρο $\Delta = \{K, \Gamma\}$	συνεχής πιθανότητα $\Delta = [0, 1]$

Γιατί μελετάμε τα Διακριτά Μαθηματικά ;

A. Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα:

- ▶ ανάλυση πολυπλοκότητας μέσω αριθμητικών συναρτήσεων,
- ▶ πιθανοκρατικοί αλγόριθμοι:
αποφεύγουν χειρίστη περίπτωση,
- ▶ βελτιστοποίηση στην επιχειρησιακή έρευνα,
π.χ. δρομολόγια αεροπορικών εταιριών,
- ▶ γεωμετρικοί αλγόριθμοι,
π.χ. κυρτό περίβλημα, διάγραμμα Voronoi.
- ▶ δομές και βάσεις δεδομένων.



Γιατί μελετάμε τα Διακριτά Μαθηματικά;

Β. Κρυπτογραφία, κωδικοποίηση, ασφάλεια:

- ▶ πρώτοι αριθμοί, π.χ. πιστωτικές κάρτες, **bitcoin**.

Γ. Τηλεπικοινωνιακά δίκτυα:

- ▶ αλγόριθμοι σε γράφους,
- ▶ συνδυαστική και πιθανότητες.

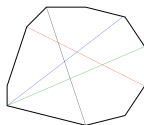
Δ. Λογική σχεδίαση και Γλώσσες προγραμματισμού / μεταγλωττιστές

- ▶ λογικές προτάσεις, θεωρία συνόλων.

Στην καθημερινότητα

- ▶ Πώς θα μάθω την αλήθεια χωρίς να ξέρω αν αυτός που απαντά είναι ψεύτης ή όχι;
- ▶ Ποιος είναι ο αποδοτικότερος αλγόριθμος ώστε να αντιμετωπίσει μαζικά δεδομένα;
- ▶ Ποια η πιθανότητα η φίλη μου να είναι έγκυος αν έχει θετικό αποτέλεσμα σε τεστ με ποσοστό επιτυχίας **80%** ;
- ▶ Γεωμετρία:

Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται πάνω στις διαγωνίους **10**-γώνου;



Περιεχόμενα μαθήματος

1. Λογική, Προτάσεις
2. Σύνολα
3. Απαρίθμηση, εγκλεισμός-αποκλεισμός
4. Μεταθέσεις, συνδυασμοί,
5. Επαγωγή
6. Ασυμπτωτική πολυπλοκότητα αλγορίθμων

Οργάνωση και περιεχόμενα Μαθήματος

Προτασιακή Λογική, Αποδείξεις

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες

Συνεπαγωγή (συμπερασμός)

Αποδείξεις

Προτασιακή Λογική

Rosen, Κεφ. 1

Μαθηματικές / λογικές προτάσεις [Rosen 1.1, 1.2]

Ορισμός (Αριστοτελική λογική).

(Μαθηματική ή λογική) πρόταση είναι μια φράση η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής, αλλά όχι και τα δύο.

Παράδειγμα.

Η Ουάσιγκτον είναι η πρωτεύουσα των Η.Π.Α.

Παράδειγμα.

$$2 + 2 = 3$$

OXI.

Τι ώρα γίνεται το μάθημα των Διακριτών;

Είδη προτάσεων

Ορισμός.

Ταυτολογία καλείται κάθε πρόταση που είναι πάντα αληθής (συμβολίζεται 1 , A ή T).

Ορισμός.

Αντίφαση καλείται κάθε πρόταση που είναι πάντα ψευδής (συμβολίζεται 0 , Ψ ή F).

Πράξεις και Πίνακες Αληθείας

- ▶ **άρνηση** της p : $\bar{p}$ ή $\neg p$,
- ▶ **διάζευξη** (ή): $p \vee q$ αληθής αν μία ή 2 προτάσεις ισχύουν,
- ▶ **αποκλειστική διάζευξη** (είτε-είτε): $p \underline{\vee} q$ αληθής αν ακριβώς μία αρχική πρόταση αληθεύει,
- ▶ **σύζευξη** (και): $p \wedge q$ αληθής αν και οι 2 προτάσεις ισχύουν,
- ▶ **ισοδυναμία** (αν και μόνον αν): $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής αν οι δυο προτάσεις έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας,

p	q	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	T	T	F	T	T

Συνεπαγωγή

Αν p τότε q : $p \rightarrow q$.

Παράδειγμα.

Αν κάποιος είναι επισκέπτης, τότε φοράει κονκάρδα.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Παράδειγμα.

Αν αντιγράψεις από τον διπλανό σου, τότε μηδενίζεσαι.

Άσκηση.

Δείξτε την ισοδυναμία συνεπαγωγής με μια κατάλληλη διάζευξη.

Σύνθετες προτάσεις συνεπαγωγών

Οι πράξεις επί **ατομικών/απλών** προτάσεων ορίζουν **σύνθετες** προτάσεις:

Εστω πρόταση $p \rightarrow q$.

► Ανάστροφη: $q \rightarrow p$

► Αντιθετοαντίστροφη: $\neg q \rightarrow \neg p$

Ισοδύναμη με την αρχική:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

► Αντίστροφη: $\neg p \rightarrow \neg q$

Σύνθετες προτάσεις: διπλή συνεπαγωγή

Ορισμός.

Ο συμβολισμός $p \leftrightarrow q$ εκφράζει την πρόταση p αν και μόνο αν q .

Άσκηση.

Η πρόταση $(p \leftrightarrow q)$ είναι ισοδύναμη με τη σύνθετη πρόταση $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Σύνθετες προτάσεις: διπλή συνεπαγωγή

Ορισμός.

Ο συμβολισμός $p \leftrightarrow q$ εκφράζει την πρόταση p αν και μόνο αν q .

Άσκηση.

Η πρόταση $(p \leftrightarrow q)$ είναι ισοδύναμη με τη σύνθετη πρόταση $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
T	T	T	T	T	T

Παράδειγμα

Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο ίντερνετ αν σπουδάζετε πληροφορική ή αν δεν είστε νέοι φοιτητές:

$$(q \vee \bar{r}) \rightarrow p.$$

p	Πρόσβαση στο ίντερνετ
q	Σπουδάζω πληροφορική
r	Είμαι νέος φοιτητής

Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο ίντερνετ μόνο αν σπουδάζετε πληροφορική ή αν δεν είστε νέοι φοιτητές:

$$p \rightarrow (q \vee \bar{r}) \equiv p \rightarrow (r \rightarrow q)$$

Προτασιακές Ισοδυναμίες [Rosen 1.3]

Ορισμός.

Λογικά ισοδύναμες είναι 2 προτάσεις με τον ίδιο πίνακα αλήθειας

Εκτός του $\alpha \leftrightarrow \beta$ υπάρχουν **εναλλακτικά** το σύμβολο $\equiv$ και ο συμβολισμός $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Διαβάζεται “αν και μόνο αν” και το γράφουμε “ανν” (if and only if ή iff).

Στην ισοδυναμία ισχύουν τα εξής:

- ▶ το α είναι επαρκής συνθήκη για το β , δηλ. β εάν α : $\alpha \Rightarrow \beta$.
- ▶ το α είναι αναγκαία συνθήκη για το β , δηλ. β μόνο αν α : $\alpha \Leftarrow \beta$.

Ιδιότητες

Ιδιότητες όπως οι παρακάτω (των οποίων η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση) απλοποιούν τις αποδείξεις και αποφεύγουν την κατασκευή ενός εξαντλητικού πίνακα αληθείας.

- ▶ Ταυτολογία: $x \vee \neg x$.
- ▶ Προσεταιριστική ιδιότητα: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
και $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
- ▶ Επιμεριστική ιδιότητα: $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
και $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Άσκηση

N.δ.6. $[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \equiv [(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)]$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] &\equiv \\ &\equiv [(p \wedge q) \vee \neg p] \wedge [(p \wedge q) \vee \neg q] && : \text{επιμεριστικότητα} \\ &\equiv [(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)] \wedge [(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)] && : \text{επιμεριστ.} \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q) && : \text{προσεταιρ.} \\ &\equiv (q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) && : \text{ταυτολογία } X \vee \neg X \end{aligned}$$

Ιδιότητες De Morgan

Ναδειχτείότι:

- ▶ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$,
- ▶ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

Απόδειξη.

Πίνακες Αληθείας

p	q	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0

Άσκηση

Νδó: $p \vee q \equiv [((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \rightarrow p]$.

Απόδειξη.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$\vee$	$\vee \rightarrow p$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1

Γρίφος

Υπάρχουν δύο φυλές, η μία λέει πάντα αλήθεια, η άλλη ποτέ.
Ερώτηση: Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Γρίφος

Υπάρχουν δύο φυλές, η μία λέει πάντα αλήθεια, η άλλη ποτέ.

Ερώτηση: Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Απάντηση ιθαγενούς I: Υπάρχει ανν λέω την αλήθεια.

Λύση. Πρόταση **A**: "ο I λέει αλήθεια", πρόταση **X**: " $\exists$ χρυσός".

Ο ιθαγενής απάντησε,

Γρίφος

Υπάρχουν δύο φυλές, η μία λέει πάντα αλήθεια, η άλλη ποτέ.

Ερώτηση: Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Απάντηση ιθαγενούς I: Υπάρχει ανν λέω την αλήθεια.

Λύση. Πρόταση A : "ο I λέει αλήθεια", πρόταση X : " $\exists$ χρυσός".

Ο ιθαγενής απάντησε, $A \leftrightarrow X$.

A	X	απάντηση $A \leftrightarrow X$	υπόθεση $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Γρίφος

Υπάρχουν δύο φυλές, η μία λέει πάντα αλήθεια, η άλλη ποτέ.

Ερώτηση: Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Απάντηση ιθαγενούς I: Υπάρχει ανν λέω την αλήθεια.

Λύση. Πρόταση A : "ο I λέει αλήθεια", πρόταση X : " $\exists$ χρυσός".

Ο ιθαγενής απάντησε, $A \leftrightarrow X$.

A	X	απάντηση $A \leftrightarrow X$	υπόθεση $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Αφού ισχύει η υπόθεση, υπάρχει χρυσός (περιπτώσεις 2,4).



Γρίφος (συνέχεια)

Εναλλακτικά θέτουμε την έρωτηση σε κάποιον ιθαγενή:
"Τι θα απαντήσει ένας ιθαγενής της άλλης φυλής ως προς την
ύπαρξη χρυσού;"

Άσκηση.

Δείξτε πως υπάρχει χρυσός αν η απάντηση είναι ΟΧΙ.

Και εδώ, μαθαίνω για τον χρυσό χωρίς να ανακαλύπτω την φυλή
του ιθαγενούς.

Ιδιότητες προτασιακής λογικής

Άσκηση.

$p \wedge p$	$\equiv$	p
$q \vee q$	$\equiv$	q
$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\neg p \vee q$
$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q$	$\equiv$	$\neg p \rightarrow q$
$p \wedge q$	$\equiv$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$

Πλήρεις πίνακες ιδιοτήτων στην Ενότητα 1.2 του Rosen.

Παράδοξο

Η θεωρία μας των προτάσεων (και συνόλων) δεν περιγράφει κάθε δυνατό σύστημα.

Π.χ. Έστω άνθρωποι που λένε είτε αλήθεια είτε ψέμματα.

Ο Χ λέει: "Είμαι ψεύτης".

Η πρόταση δεν είναι ούτε Α ούτε Ψ.

Π.χ. "Όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες", είπε ο Κ ο Κρητικός.

Πρόβλημα αυτοαναφοράς [Επιμενίδης].

Παράδοξο του **Russell**: Έστω **R** το σύνολο των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Αδύνατον να αποφασίσουμε για το **R**.

Οργάνωση και περιεχόμενα Μαθήματος

Προτασιακή Λογική, Αποδείξεις

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες

Συνεπαγωγή (συμπερασμός)

Αποδείξεις

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες [Rosen 1.4]

Ορισμός.

Το **κατηγορήμα** είναι μια πρόταση της οποίας η λογική τιμή εξαρτάται από την τιμή μίας ή περισσότερων **μεταβλητών**.

Παράδειγμα.

Η προτασιακή συνάρτηση

$$P(x) : x > 3$$

έχει μεταβλητή x , κατηγορήμα: $x > 3$.

Ποσοδείκτες

Εστω μεταβλητή x σε ένα πεδίο ορισμού (ή πεδίο).

- **Υπαρξιακή πρόταση:** $\exists x : P(x)$ (υπάρχει x τέτοιο ώστε το κατηγορήμα P να είναι αληθές για το x).

Π.χ. " $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$ ", ισχύει για $x = \pi$.

Πρόκειται ουσιαστικά για μια συνεπαγωγή:

$\exists x : Y(x)$ συνεπάγεται $P(x)$.

Αποδεικνύεται αν βρεθεί $x = a : Y(a) \rightarrow P(a)$.

Π.χ. " $\exists x$ στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4\} : x^2 > 10$ ", ισχύει για $x = 4$.

- **Καθολική πρόταση:** $\forall x : Y(x)$ τότε $P(x)$.

Αποδεικνύεται αν δειχθεί $Y \rightarrow P$ γενικά.

Π.χ. $\forall n$ περιττός, το n^2 περιττός: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Αρνηση ποσοτικοποιημένων συνεπαγωγών

- ▶ Υπαρξιακή πρόταση συνεπαγωγής: $\exists x : Y(x) \rightarrow P(x)$.
Καταρρίπτεται αν $\forall x$: αν ισχύει $Y(x)$, τότε δεν ισχύει $P(x)$.
Αρνηση της υπαρξιακής πρότασης είναι η καθολική:
" $\forall x$ τ.ώ. η $Y(x)$ ισχύει, τότε ισχύει $\neg P(x)$ ".
- ▶ Καθολική πρόταση: $\forall x : Y(x)$ τότε $P(x)$.
Καταρρίπτεται με **αντιπαράδειγμα** $x = a : Y(a) = T, P(a) = F$
Π.χ. " $\forall n \in \mathbb{N}$, ο $n! + 1$ πρώτος" ψευδής: $n = 4, 4! + 1 = 25$.
Η άρνηση είναι η υπαρξιακή πρόταση: $\exists x : Y(x)$ και $\neg P(x)$.

Αρνηση ποσοτικοποιημένων εκφράσεων

Οι κανόνες De Morgan για ποσοδείκτες:

Αρνηση	Ισοδύναμη πρόταση
$\neg(\exists x : P(x))$	$\forall x : \neg P(x)$
$\neg(\forall x : P(x))$	$\exists x : \neg P(x)$

Ποσοτικοποίηση δύο μεταβλητών [Rosen 1.5]

- ▶ Πρόταση: $\forall x \forall y : P(x, y)$ ισοδύναμη με: $\forall y \forall x : P(x, y)$.
Αληθής αν η $P(x, y)$ αληθεύει για κάθε ζεύγος x, y .
Ψευδής αν υπάρχει ζεύγος x, y για το οποίο η $P(x, y)$ είναι ψευδής.
- ▶ Πρόταση: $\forall x \exists y : P(x, y)$.
Αληθής αν, για κάθε x , υπάρχει y για το οποίο η $P(x, y)$ αληθεύει.
Ψευδής αν υπάρχει x τ.ώ. η $P(x, y)$ είναι ψευδής για κάθε y ,
δηλαδή: $\exists x \forall y : \neg P(x, y)$.

Φωλιασμένοι ποσοδείκτες

Αν υπάρχουν ποσοδείκτες δύο ειδών, η **σειρά** τους έχει σημασία.

Εστω $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\forall x, \exists y, z : x = y + z$: αληθής, διότι $z = x - y$.

$\exists y, z : \forall x, x = y + z$: ψευδής, διότι $\forall y, z, \exists x = y + z + 1 \neq y + z$

Π.χ. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists$ πρώτος p τ.ώ. $n < p \leq n! + 1$.

Απόδειξη.

Αν ο $n! + 1$ είναι πρώτος, η απόδειξη έληξε με $p = n! + 1$.

Αλλιώς, $\exists$ πρώτος $q \mid n! + 1$, $2 \leq q < n! + 1$.

Αν $q > n$, θέτω $p = q$.

Αλλιώς $2 \leq q \leq n$, τότε $q \mid n!$. Επίσης $q \mid n! + 1$: άτοπο.

Ψευδές: $\exists$ πρώτος $p : \forall n \in \mathbb{N}^*, n < p \leq n! + 1$.

Οργάνωση και περιεχόμενα Μαθήματος

Προτασιακή Λογική, Αποδείξεις

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες

Συνεπαγωγή (συμπερασμός)

Αποδείξεις

Συνεπαγωγή και ισοδυναμία

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ σημαίνει: α αν και μόνον αν β ,
δηλ. η α είναι αναγκαία και επαρκής συνθήκη για την β ,
δηλ. ισχύουν τα εξής:

- ▶ Επαρκής συνθήκη: $\alpha \Rightarrow \beta$ (ισχύει β όταν / εάν ισχύει α).
Π.χ. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$. Δεν είναι όμως και αναγκαία!
($x = 3 \nLeftarrow x^2 = 9$).

Ισοδύναμα $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$.

- ▶ Αναγκαία συνθήκη: $\alpha \Leftarrow \beta$ (ισχύει β μόνο αν ισχύει α).
Π.χ. $x^2 > 4 \Leftarrow x > 2$. Δεν είναι όμως και επαρκής!
($x^2 > 4 \nRightarrow x > 2$).

Ισοδύναμα $\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta$.

- ▶ Αν η α είναι επαρκής συνθήκη για τη β , τότε η β είναι αναγκαία για την α

Κανόνες συμπερασμού [Rosen 1.6]

Ορισμός.

Επιχείρημα καλείται μια ακολουθία προτάσεων: όλες εκτός της τελευταίας καλούνται υποθέσεις, ενώ η τελευταία καλείται συμπέρασμα.

Ενα επιχείρημα είναι ορθό αν η αλήθεια των υποθέσεων συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος.

Ορθά επιχειρήματα / Κανόνες / Ταυτολογίες:

- ▶ **Modus ponens:** $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$.
- ▶ **Modus tollens:** $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$.
- ▶ **Υποθετικός συλλογισμός:** $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.
- ▶ **Διαζευτικός συλλογισμός:** $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$.
- ▶ **Επίλυση:** $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \Rightarrow (q \vee r)$.

Κανόνες συμπερασμού

Παράδειγμα.

Δείξτε ότι οι προτάσεις "Δεν έχει ήλιο σήμερα και ο καιρός είναι κρύος" και "Θα πάμε για μπάνιο μόνο αν έχει ήλιο" συνεπάγονται την πρόταση "Δεν θα πάμε για μπάνιο".

Κανόνες συμπερασμού

Παράδειγμα.

Δείξτε ότι οι προτάσεις "Δεν έχει ήλιο σήμερα και ο καιρός είναι κρύος" και "Θα πάμε για μπάνιο μόνο αν έχει ήλιο" συνεπάγονται την πρόταση "Δεν θα πάμε για μπάνιο".

Λύση.

Θέτουμε τις εξής προτάσεις:

$H \equiv$ "Έχει ήλιο σήμερα"

$K \equiv$ "Ο καιρός είναι κρύος"

$M \equiv$ "Θα πάμε για μπάνιο"

Ισχύουν οι $\neg H \wedge K$ και $M \rightarrow H$ από υπόθεση.

Κανόνες συμπερασμού

Παράδειγμα.

Δείξτε ότι οι προτάσεις "Δεν έχει ήλιο σήμερα και ο καιρός είναι κρύος" και "Θα πάμε για μπάνιο μόνο αν έχει ήλιο" συνεπάγονται την πρόταση "Δεν θα πάμε για μπάνιο".

Λύση.

Θέτουμε τις εξής προτάσεις:

$H \equiv$ "Έχει ήλιο σήμερα"

$K \equiv$ "Ο καιρός είναι κρύος"

$M \equiv$ "Θα πάμε για μπάνιο"

Ισχύουν οι $\neg H \wedge K$ και $M \rightarrow H$ από υπόθεση.

Modus tollens: έχουμε $(\neg H \wedge (M \rightarrow H)) \Rightarrow \neg M$.

Κανόνες συμπερασμού με ποσοδείκτες

- ▶ Καθολική εφαρμογή: $\forall xP(x)$ άρα ισχύει $P(c)$, όπου c ένα συγκεκριμένο μέλος του πεδίου ορισμού.
- ▶ Καθολική γενίκευση / απόδειξη πρότασης: αν ισχύει $P(c)$ για c αυθαίρετο, τότε ισχύει $\forall xP(x)$.
- ▶ Υπαρξιακή εφαρμογή: αν $\exists xP(x)$ τότε ισχύει $P(c)$ για κάποιο συγκεκριμένο c (που όμως δεν γνωρίζω ποιο είναι).
- ▶ Υπαρξιακή γενίκευση / απόδειξη πρότασης: αν ισχύει $P(c)$ για κάποιο c τότε ισχύει η πρόταση: $\exists xP(x)$.

Κανόνες συμπερασμού με ποσοδείκτες

Παράδειγμα.

Οι προτάσεις "Όσοι είναι 1ο έτος Πληροφορικής παρακολουθούν Διακριτά" και "Η Μ είναι πρωτοετής φοιτήτρια Πληροφορικής" οδηγούν στο συμπέρασμα "Η Μ παρακολουθεί Διακριτά".

Λύση.

Κανόνες συμπερασμού με ποσοδείκτες

Παράδειγμα.

Οι προτάσεις "Όσοι είναι 1ο έτος Πληροφορικής παρακολουθούν Διακριτά" και "Η Μ είναι πρωτοετής φοιτήτρια Πληροφορικής" οδηγούν στο συμπέρασμα "Η Μ παρακολουθεί Διακριτά".

Λύση.

Εστω $p(x)$: "ο x είναι πρωτοετής", $q(x)$: "ο x παρακολουθεί Διακριτά" και $P(x) : p(x) \rightarrow q(x)$.

Κανόνες συμπερασμού με ποσοδείκτες

Παράδειγμα.

Οι προτάσεις "Όσοι είναι 1ο έτος Πληροφορικής παρακολουθούν Διακριτά" και "Η Μ είναι πρωτοετής φοιτήτρια Πληροφορικής" οδηγούν στο συμπέρασμα "Η Μ παρακολουθεί Διακριτά".

Λύση.

Εστω $p(x)$: "ο x είναι πρωτοετής", $q(x)$: "ο x παρακολουθεί Διακριτά" και $P(x) : p(x) \rightarrow q(x)$.

Κανόνας καθολικής εφαρμογής: Από υπόθεση $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$, τότε $p(M) \rightarrow q(M)$.

Οργάνωση και περιεχόμενα Μαθήματος

Προτασιακή Λογική, Αποδείξεις

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες

Συνεπαγωγή (συμπερασμός)

Αποδείξεις

Αποδείξεις [Rosen 1.7]

Απόδειξη μιας (μαθηματικής) πρότασης P
καλείται η τεκμηρίωση της αλήθειας της P ,
η οποία στηρίζεται σε αξιώματα ή υποθέσεις Y και χρησιμοποιεί
λογικούς συλλογισμούς για να καταδείξει την ισχύ της P δηλ.
τεκμηριώνει τη συνεπαγωγή $Y \rightarrow P$.

Στρατηγικές Αποδείξεων [Rosen 1.8]

1. Ευθέως/άμεσα με: $Y \rightarrow Q \rightarrow P$,
ή με "αντίστροφο" συλλογισμό $P \leftrightarrow Q, Y \rightarrow Q$,
όπου αρκούσε να δειχθεί $P \leftarrow Q \leftarrow Y$.
2. Έμμεση απόδειξη: Απαγωγή σε άτοπο δηλ. μέσω
αντιθετοαντίστροφου $\neg P \rightarrow \neg Y$.
3. Υπαρξιακή απόδειξη, ή απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
4. Επαγωγικά, εφόσον η πρόταση $P(n)$, $n \geq n_0$ είναι συνάρτηση
του $n \in \mathbb{N}$: Δείχνουμε την $P(n_0)$ και την $P(n)$ υποθέτοντας
 $P(k)$, $k < n$. [Rosen, κεφ. 5]

Στρατηγική 1α: Απαρίθμηση περιπτώσεων / Εξαντλητικές αποδείξεις

$$[(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \rightarrow q] \equiv [(p_1 \rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

Παράδειγμα.

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 \geq n.$$

Απόδειξη.

Τρεις (μη-επικαλυπτόμενες) περιπτώσεις:

- Περίπτωση 0. $n = 0$ τότε $0 \geq 0$ ισχύει.
- Περίπτωση 1. $n > 0$ τότε $n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq n$ ισχύει.
- Περίπτωση 2. $n < 0$ τότε $n \leq -1 \Rightarrow a = -n \geq 1: a > 0$
ανάγεται στην Περίπτωση 1.

Στρατηγική 1β. Αντίστροφος συλλογισμός

Παράδειγμα.

Για δύο διαφορετικούς θετικούς ακέραιους, ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος του γεωμετρικού μέσου:

$$\forall x \neq y \in \mathbb{N}^*, (x + y)/2 > \sqrt{xy}.$$

Απόδειξη.

Χρήση ισοδυναμίας:

$$\begin{aligned}(x + y)/2 > \sqrt{xy} &\Leftrightarrow (x + y)^2/4 > xy \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 > 4xy \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 > 0.\end{aligned}$$

Στρατηγική 2. Εις άτοπον απαγωγή

Παράδειγμα.

Σε μια ομάδα **37** ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον **4** που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.

Απόδειξη.

Έστω ότι στους **37** έως **3** έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα. Άρα η ομάδα μπορεί να αποτελείται από το πολύ $3 \times 12 = 36$ άτομα. Άτοπο διότι η ομάδα έχει **37**.

Στρατηγική 2. Εις άτοπον απαγωγή (2)

Παράδειγμα.

Δεν υπάρχει ρητός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχει τέτοιος αριθμός. Τότε γράφεται ως ανάγωγο (μη αναγώγιμο) κλάσμα $x = a/b$. Άρα

$$(a/b)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2,$$

δλδ ο a είναι άρτιος, οπότε $\exists k, a = 2k$.

Όμως $(2k/b)^2 = 2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$, άρα και ο b άρτιος. Άτοπο, καθώς υποθέσαμε την ύπαρξη ανάγωγου κλάσματος.

Στρατηγική 3α: Υπαρξιακή απόδειξη

Για προτάσεις τύπου $\exists x P(x)$: κατασκευαστικές ή μη.

Παράδειγμα.

$\exists x \in \mathbb{N}$ που γράφεται ως άθροισμα κύβων με δύο τρόπους.

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3 \text{ (ελάχιστος).}$$

Παράδειγμα.

Νδό. $\exists x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x^y \in \mathbb{Q}$.

Γνωρίζουμε πως $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Εστω ο $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

– Αν είναι ρητός, αποδείχθηκε η πρόταση.

– Αλλιώς $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}, x^y = 2$.

Στρατηγική 3β: Αντιπαράδειγμα

Παράδειγμα.

$\forall x \in \mathbb{N}$ γράφεται ως άθροισμα τριών τετραγώνων;

Απόδειξη.

Παρατηρώ πως $1 = 0 + 0 + 1, 2 = 0 + 1 + 1$ κλπ. Ομως ο 7 δεν γράφεται ως άθροισμα τριών τετραγώνων (εκ των 0, 1, 4.)

Στρατηγική 4: Εξαντλητική Απόδειξη

Παράδειγμα.

Ν.δ.ο. $\nexists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ τέτοιο ώστε $n^2 + n^3 = 100$

Απόδειξη.

► Αν $n \leq 5$, τότε

$$n = 0 \rightarrow 0^2 + 0^3 = 0$$

$\vdots$

$$n = 4 \rightarrow 4^2 + 4^3 = 16 + 64 = 80$$

$$n = 5 \rightarrow 5^2 + 5^3 = 25 + 125 = 150$$

► Αν $n > 5$, τότε

$$n^2 + n^3 > 5^2 + 5^3 > 100$$