Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Επιχειρήματα και Κανόνες συμπερασμού

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

1. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$, τότε $n^2 > 1$. Έστω ότι $n^2 > 1$. Τότε, $n > 1$.
2. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$, τότε $n^2 > 9$. Έστω ότι $n^2 \leq 9$. Τότε, $n \leq 3$.
3. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$, τότε $n^2 > 4$. Έστω ότι $n \leq 1$. Τότε, $n^2 \leq 4$.

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

1. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$, τότε $n^2 > 1$. Έστω ότι $n^2 > 1$. Τότε, $n > 1$.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$" και q για την πρόταση "$n^2 > 1$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge q) \to p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \wedge q) \to p$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος".

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

2. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$, τότε $n^2 > 9$. Έστω ότι $n^2 \leq 9$. Τότε, $n \leq 3$.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο καθώς η μορφή του είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$" και q για την πρόταση "$n^2 > 9$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Αυτός όμως είναι ο κανόνας modus tollens.

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

3. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$, τότε $n^2 > 4$. Έστω ότι $n \leq 2$. Τότε, $n^2 \leq 4$.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$" και q για την πρόταση "$n^2 > 4$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land \neg p) \to \neg q$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & \neg q \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \land \neg p) \to \neg q$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "άρνησης της υπόθεσης".

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

1. Αν ο x είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Άρα, αν ο a^2 είναι θετικός, όπου ο a είναι πραγματικός, τότε ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός.
2. Αν $x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $x \neq 0$. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός με $a^2 \neq 0$. Τότε, $a \neq 0$.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

1. Αν ο x είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Άρα, αν ο a^2 είναι θετικός, όπου ο a είναι πραγματικός, τότε ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλητές p για την πρόταση "x είναι θετικός πραγματικός αριθμός" και q για την πρόταση "ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land q) \to p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \land q) \to p$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος". Δεν έχει σημασία ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο a αντί του x καθώς εκφράζεται σε κάθε περίπτωση η ίδια πρόταση.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

2. Αν $x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $x \neq 0$. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός με $a^2 \neq 0$. Τότε, $a \neq 0$.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο καθώς η μορφή του είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "$x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός" και q για την πρόταση "$x \neq 0$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge p) \to q$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore & q \end{array}$$

Αυτός όμως είναι ο κανόνας modus ponens. Δεν έχει σημασία ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο a αντί του x καθώς εκφράζεται σε κάθε περίπτωση η ίδια πρόταση.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

1. Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική. Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης. Άρα ο Πέτρος καταλαβαίνει λογική.
2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.
3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.
4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

1. Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική. Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης. Άρα ο Πέτρος καταλαβαίνει λογική.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι φοιτητής της τάξης" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x καταλαβαίνει λογική". Συνεπώς, η πρόταση "Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $P(\alpha)$, όπου α είναι ο Πέτρος. Από εδώ προκύπτει άμεσα ότι το επιχείρημα είναι σωστό καθώς πρόκειται για τον κανόνα "καθολικό modus ponens"

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ & P(\alpha) \\ \hline \therefore & Q(\alpha) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι φοιτητής πληροφορικής" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών". Συνεπώς, η πρόταση "Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. Η πρόταση "Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $Q(\alpha)$, όπου α είναι η Νατάσα. Θα εφαρμοσούμε αρχικά καθολική συγκεκριμενοποίηση, από την οποία προκύπτει ότι:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια μη έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \wedge Q(\alpha)) \rightarrow P(\alpha)$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος".

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.

Αν x είναι ένα πουλί τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το πουλί x είναι παπαγάλος" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το πουλί x αγαπά τα φρούτα". Συνεπώς, η πρόταση "Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $\neg P(\alpha)$, όπου α είναι το κατοικίδιο πουλί μου. Θα εφαρμόσουμε αρχικά καθολική συγκεκριμενοποίηση:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια μη έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \wedge \neg P(\alpha)) \rightarrow \neg Q(\alpha)$ δεν είναι ταυτολογία. Από εδώ προκύπτει ότι το επιχείρημα είναι λάθος καθώς πρόκειται για την πλάνη της "άρνησης της υπόθεσης".

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x τρώει γκρανόλα κάθε μέρα" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι υγιές". Συνεπώς, η πρόταση "Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Η Λίντα δεν είναι υγιής" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $\neg Q(\alpha)$, όπου α είναι η Λίντα. Αντίστοιχα, η πρόταση "η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα" αναπαρίσταται ως $\neg P(\alpha)$ Θα εφαρμόσουμε αρχικά καθολική συγκεκριμενοποίηση:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \to Q(\alpha)) \wedge \neg Q(\alpha)) \to \neg P(\alpha)$ είναι ο κανόνας modus tollens.

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \\ & \neg Q(\alpha) \\ \hline \therefore & \neg P(\alpha) \end{array}$$

Άσκηση 4

Βάσει των ακόλουθων υποθέσεων:

a. Η λογική είναι δύσκολη ή η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές
b. Αν τα μαθηματικά είναι εύκολα, τότε η λογική δεν είναι δύσκολη

να προσδιοριστεί ποια από τα παρακάτω είναι έγκυρα συμπεράσματα:

1. Τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα αν σε πολλούς φοιτητές αρέσει η λογική.
2. Η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές, αν μαθηματικά δεν είναι εύκολα.
3. Τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα ή η λογική είναι δύσκολη.
4. Η λογική δεν είναι δύσκολη ή τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα.
5. Αν η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές, τότε είτε τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα, είτε η λογική δεν είναι δύσκολη.

Αν p η πρόταση "η λογική είναι δύσκολη", q η πρόταση "η λογική αρέσει σε πολλούς φοιτητές", r η πρόταση "τα μαθηματικά είναι εύκολα", οι υποθέσεις a και b μπορούν να παρασταθούν μέσω λογικών τελεστών ως εξής:

- a) $p \vee \neg q$. Παρατηρούμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $q \rightarrow p$
- b) $r \rightarrow \neg p$. Παρατηρούμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφη $p \rightarrow \neg r$

Από τις υποθέσεις προκύπτουν τα εξής:

1. $q \rightarrow \neg r$. 'Εγκυρο συμπέρασμα βάσει του υποθετικού συλλογισμού.
2. $\neg r \rightarrow \neg q$ ή ισοδύναμα $q \rightarrow r$. Δεν προκύπτει από τις υποθέσεις. Το συμπέρασμα είναι ψευδές αν q είναι αληθές και r ψευδές. Αν θεωρήσουμε ότι το p είναι αληθές, τότε προκύπτει ότι και οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς πρόκειται για μη έγκυρο συμπέρασμα.
3. $p \vee \neg r$ ή ισοδύναμα $r \rightarrow p$. Δεν προκύπτει από τις υποθέσεις. Αν λάβουμε r αληθές, p ψευδές και q ψευδές, οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.
4. $\neg p \vee \neg r$ ή ισοδύναμα $p \rightarrow \neg r$. Που είναι η δεύτερη υπόθεση συνεπώς είναι έγκυρο μέσω απλοποίησης.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:

5. $\neg q \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$. Η μόνη περίπτωση να είναι αυτό ψευδές είναι να είναι η q ψευδής, η p αληθής και η r αληθής. Τότε όμως παραβιάζεται η υπόθεση $r \rightarrow \neg p$. Συνεπώς, σε όλες τις περιπτώσεις που ισχύουν οι υποθέσεις, ισχύει και το συμπέρασμα, που είναι τουτέστιν έγκυρο.

Άσκηση 5

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συμπερασμού για να δείξετε ότι αν τα κατηγορήματα $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ και $\neg R(\alpha)$, όπου α είναι στοιχείο του πεδίου είναι αληθή, τότε το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Άσκηση 5

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συμπερασμού για να δείξετε ότι αν οι υποθέσεις (ή προκείμενες) $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to R(x))$ και $\neg R(\alpha)$, όπου α είναι στοιχείο του πεδίου είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Εφαρμόζοντας καθολική συγκεκριμενοποίηση στη δεύτερη υπόθεση ισχύει ότι $Q(\alpha) \to R(\alpha)$. Συνεπώς βάσει του κανόνα modus tollens ισχύει $\neg Q(\alpha)$.
Αντιστοίχως, με καθολική συγκεκριμενοποίηση στην πρώτη υπόθεση ισχύει ότι $P(\alpha) \to Q(\alpha)$. Δεδομένου ότι ισχύει $\neg Q(\alpha)$ βάσει του κανόνα modus tollens προκύπτει ότι το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.