

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Λογική: Προτάσεις και Προτασιακές Ισοδυναμίες

Προτάσεις και Προτασιακές Ισοδυναμίες

Πρόταση είναι μια δηλωτική φράση (δηλαδή μια φράση που δηλώνει ένα γεγονός), η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής, **αλλά όχι και τα δυο**.

- Σήμερα είναι το πρώτο μας μάθημα.
- $7 + 2 = 12$.
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.
- Απάντησε σε αυτήν την ερώτηση.
- Τι ώρα γίνεται το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών;
- $x + 8 = 10$.

Ποια είναι η άρνηση καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις;

- Το μάθημα των διακριτών παρακολουθούν τουλάχιστον 50 δευτεροετείς φοιτητές.
- Όλοι οι φοιτητές αγαπούν το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών.
- Κάποιος φοιτητής πήρε 10 στην τελική εξέταση των Διακριτών Μαθηματικών.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 και με το 3.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 ή με το 3.

Τρεις φοιτητές κάθονται σε ένα εστιατόριο. Ο σερβιτόρος τους ρωτάει: «Θα πιείτε όλοι καφέ;»

- * Ο πρώτος λέει: «Δεν ξέρω».
- * Ο δεύτερος λέει «Δεν ξέρω».
- * Ο τρίτος λέει: «Όχι».

Σε ποιους θα φέρει καφέ;

Άσκηση 1

Έστω p, q, r οι προτάσεις:

p : Παίρνεις 10 στο διαγώνισμα, q : Λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου, r : Παίρνεις 10 στο μάθημα.

Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας τις p, q, r , τους λογικούς τελεστές και τις αρνήσεις:

- ⓐ Παίρνεις 10 στο μάθημα αλλά δεν λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου.
- ⓑ Παίρνεις 10 στο διαγώνισμα, λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου και παίρνεις 10 στο μάθημα.
- ⓒ Για να πάρεις 10 στο μάθημα είναι αναγκαίο να πάρεις 10 στο διαγώνισμα
- ⓓ Παίρνεις 10 στο διαγώνισμα αλλά δεν λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου. Ωστόσο παίρνεις 10 στο μάθημα.
- ⓔ Το να πάρεις 10 στο διαγώνισμα και να λύσεις κάθε άσκηση του βιβλίου αρκεί για να πάρεις 10 στο μάθημα.
- ⓕ Θα πάρεις 10 στο μάθημα, αν και μόνον αν είτε λύσεις κάθε άσκηση του βιβλίου είτε πάρεις 10 στο διαγώνισμα.

a $r \wedge \neg q$

b $p \wedge q \wedge r$

c $r \rightarrow p$

d $p \wedge \neg q \wedge r$

e $p \wedge q \rightarrow r$

f $r \leftrightarrow p \vee q$

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις υπό διπλή συνθήκη (ισοδυναμία) είναι αληθείς ή ψευδείς:

- a $2 + 2 = 4$, αν και μόνον αν $1 + 1 = 2$
- b $1 + 1 = 2$, αν και μόνον αν $2 + 3 = 4$
- c $1 + 1 = 3$, αν και μόνον αν οι πίθηκοι μπορούν να πετάξουν.
- d $0 > 1$, αν και μόνον αν $2 > 1$

a $A (A \leftrightarrow A)$

b $\Psi (A \leftrightarrow \Psi)$

c $A (\Psi \leftrightarrow \Psi)$

d $\Psi (\Psi \leftrightarrow A)$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις υπό συνθήκη (συνεπαγωγή) είναι αληθείς οι ψευδείς:

- a Αν $1 + 1 = 3$, τότε υπάρχουν μονόκεροι.
- b Αν $1 + 1 = 3$, τότε τα σκυλιά μπορούν να πετάξουν.
- c Αν $1 + 1 = 2$, τότε τα σκυλιά μπορούν να πετάξουν.
- d Αν $2 + 2 = 4$, τότε $1 + 2 = 3$

- a $A (\Psi \rightarrow \Psi)$
- b $A (\Psi \rightarrow \Psi)$
- c $\Psi (A \rightarrow \Psi)$
- d $A (A \rightarrow A)$

Άσκηση 4

Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να προσδιορίσετε αν υπονοείται διαζευκτικό ή αποκλειστικό 'Η. Να εξηγήσετε την απάντησή σας

- a Απαιτείται εμπειρία στη C++ ή τη Java.
- b Το μεσημεριανό περιλαμβάνει σούπα ή σαλάτα.
- c Για να μπει στη χώρα απαιτείται διαβατήριο ή ταυτότητα.

- α Διαζευκτικό διότι το ένα γεγονός δεν αναιρεί το άλλο.
- β Αποκλειστικό διότι τα δύο γεγονότα δεν μπορούν να είναι ταυτοχρόνως αληθή. Είτε θα σερβιριστεί σούπα, είτε σαλάτα όχι και τα δύο.
- γ Διαζευκτικό.

Άσκηση 5

Να κατασκευάσετε τον πίνακα αλήθειας της πρότασης $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$.

Homework

Το κυνήγι του θησαυρού

Σε μία σπηλιά, υπάρχουν τρία σεντούκια, ένα κόκκινο ένα πράσινο και ένα μαύρο, καθένα από τα οποία έχει τις εξής επιγραφές:

- Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
- Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
- Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.

Γνωρίζοντας ότι μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και πως το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής, μπορείτε να βρείτε που βρίσκεται ο θησαυρός;

Το κυνήγι του θησαυρού

-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.

-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.

-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.

Μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής

p : «ο θησαυρός είναι στο κόκκινο σεντούκι»

q : «ο θησαυρός είναι στο μαύρο σεντούκι»

r : «ο θησαυρός είναι στο πράσινο σεντούκι»

p	q	r	$K: p$	$M: \neg q$	$\Pi: \neg p$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	F	F

Είναι η φράση "Αυτή η πρόταση είναι ψευδής" πρόταση;

Είναι η φράση "Αυτή η πρόταση είναι ψευδής" πρόταση;

Η εν λόγω φράση δεν αποτελεί πρόταση γιατί δεν έχει τιμή αλήθειας, είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής. Έστω ότι ήταν αληθής, τότε θα ήταν αληθές ότι είναι ψευδής, συνεπώς θα ήταν ταυτόχρονα αληθής και ψευδής, το οποίο αποτελεί αντίφαση. Αν ήταν ψευδής τότε ο ισχυρισμός "δεν ισχύει ότι η πρόταση είναι ψευδής" σημαίνει ότι η πρόταση είναι αληθής, οπότε πάλι καταλήξαμε σε αντίφαση.

Σωστό ή Λάθος;

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	F	F				
F	F	T				
F	T	T				
F	T	F				

Σωστό ή Λάθος;

 $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Άσκηση 6

Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p , q , r και s που είναι αληθής μόνο όταν τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

Homework

Άσκηση 7

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Άσκηση 7

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q)$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Άσκηση 7

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q)$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Άσκηση 8

Ναδειχθεί ότι η παρακάτω προτάση είναι ταυτολογία:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$$

Άσκηση 8

Ναδειχθεί ότι η παρακάτω προτάση είναι ταυτολογία:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$$

Τρόπος 1

Πίνακας αλήθειας για την πρόταση $P \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$:

p	q	r	$\neg p$	$(p \vee q)$	$\neg p \vee r$	$q \vee r$	P
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	F	F					
F	F	T					
F	T	T					
F	T	F					

Άσκηση 8

Ναδειχθεί ότι η παρακάτω προτάση είναι ταυτολογία:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$$

Τρόπος 2

Έστω ότι η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Τότε θα υπάρχουν τιμές αλήθειας των p, q, r για τις οποίες θα είναι ψευδής. Μια συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο όταν το αριστερό μέρος είναι αληθές και το δεξί ψευδές. Εφόσον το αριστερό μέρος είναι αληθές πρέπει να είναι αληθής τόσο η πρόταση $p \vee q$ όσο και η πρόταση $\neg p \vee r$. Εφόσον το δεξί μέρος είναι ψευδές πρέπει να είναι ψευδής τόσο η q όσο και η r . Ως εκ τούτου, πρέπει να είναι αληθής τόσο η p όσο και η $\neg p$. Καταλήξαμε σε αντίφαση (σε άτοπο). Άρα η πρόταση είναι ταυτολογία.

Άσκηση 9

Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$\alpha) (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p \quad \beta) \text{ (homework) } ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$$

Άσκηση 9

Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$\alpha) (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p \quad \beta) ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$$

$$\alpha) (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Τρόπος 1

$$\begin{aligned} (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p &\equiv \neg(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \vee \neg p \equiv (q \vee \neg(p \rightarrow q)) \vee \neg p \equiv \\ &(\neg p \vee q) \vee \neg(p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q) \equiv T \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$\alpha) (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p \quad \beta) ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$$

$$\alpha) (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Τρόπος 2

Εάν το αριστερό μέρος της πρότασης, $\neg q \wedge (p \rightarrow q)$, είναι ψευδές, τότε η πρόταση είναι αληθής. Εάν είναι αληθές πρέπει τόσο το $\neg q$ να είναι αληθές, όσο και το $p \rightarrow q$, άρα το p είναι ψευδές. Το τελευταίο δείχνει ότι και το δεξί μέρος $\neg p$ είναι αληθές και ως εκ τούτου η πρόταση είναι ταυτολογία.

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Μία δήλωση που επιτυγχάνει το ζητούμενο είναι η:

«Δεν θα μου δώσεις ούτε το αυτοκίνητο ούτε τη βίλα».

Φήμες ή πραγματικότητα;

«Ο θείος Κώστας είναι πολύ πλούσιος» είπε ο ξάδερφος σας. «Έχει τουλάχιστον 10 συλλεκτικά αυτοκίνητα». «Αποκλείεται», είπε η ξαδέρφη σας. «Είμαι σίγουρη ότι έχει λιγότερα από 10». «Από όσο ξέρω εγώ, έχει τουλάχιστον ένα», πρόσθεσε ο πατέρας σας. Αν μόνο ένας έχει δίκιο, τότε πόσα αυτοκίνητα έχει ο θείος Κώστας;