Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Συναρτήσεις - Πληθικότητα Συνόλων - Ακολουθίες

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

γ. Έχει η f και η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

α. Η f είναι ένα-προς-ένα (Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$), ενώ η g όχι ($g(a) = g(d)$).

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

β. Η f είναι επί (κάθε στοιχείο του B αποτελεί εικόνα ενός στοιχείου του A), ενώ η g όχι ($\nexists x \in B : g(x) = 4$).

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

γ. Έχει η f και η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

γ. Η f έχει αντίστροφη ως ένα-προς-ένα και επί. Αυτή είναι η $f^{-1} : B \to A$ με τιμές $f^{-1}(a) = 3, f^{-1}(b) = 4, f^{-1}(c) = 2, f^{-1}(d) = 1$. Η g δεν έχει αντίστροφη αφού δεν είναι ούτε ένα-προς-ένα ούτε επί.

Ασκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.
- Αν η f και η $f \circ g$ είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.
- Αν η f και η $f \circ g$ είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Ασκηση 2

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Λάθος, διότι δεν γνωρίζουμε αν είναι επί.

- Αν η f και η f∘g είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.

Σωστό Άμεση απόδειξη: Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$. Ας υποθέσουμε $g(a) = g(b)$. Ως εκ τούτου $f(g(a)) = f(g(b))$. Από τον ορισμό της σύνθεσης των συναρτήσεων προκύπτει $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$. Επειδή η $f \circ g$ είναι 1-1, προκύπτει $a = b$. Άρα και η g είναι 1-1.

Ασκηση 2

- Αν η f και η f∘g είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Λάθος. Απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$ και $A = \{0\}, B = \{0, 1\}, C = \{0\}$. Επίσης $g(0) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$. Η f είναι επί γιατί για κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών $y \in C$ (που είναι μοναδικό, y=0) υπάρχει $x \in B$ ώστε $f(x) = y$. Επίσης η $f \circ g$ είναι επί διότι για κάθε στοιχείο $y \in C$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $(f \circ g)(x) = y$. Πράγματι, $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$. Ωστόσο, η g δεν είναι επί γιατί δεν υπάρχει $a \in A$ ώστε $g(a) = 1$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- Έστω n άρτιος. Τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k$. Προφανώς $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k$. Άρα το άθροισμα αυτών των 2 ισούται με το n.

- Αν n περιττός, τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k + 1$. Δηλαδή, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = k$ και $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k + 1$, δίνοντας πάλι την ισότητα στο άθροισμα.

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:

-$\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

-$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Αν $\varepsilon = \delta = 0$, τότε και οι δύο πλευρές είναι ίσες με $n + m$.

Αν $\varepsilon = 0, \delta > 0$, τότε η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ και η δεξιά $n + m$.

Αν $\varepsilon > 0$, τότε η δεξιά πλευρά είναι $n + m + 1$. Η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ ανν $\varepsilon + \delta \leq 1$ διαφορετικά $\lceil x + y \rceil = n + m + 2$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν αμφότεροι οι x και y είναι ακέραιοι ή όταν ο x δεν είναι ακέραιος και το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο με 1.

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Προφανώς ισχύει αν είτε ο x είτε ο y είναι ακέραιος. (Βλ. ταυτότητα 4a, Ενότητα 2.3)

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Δεδομένου ότι $x + y = m + n + \varepsilon + \delta$, η ισότητα ισχύει όταν $\varepsilon + \delta < 1$. Διαφορετικά, Αν $\varepsilon + \delta \geq 1$, τότε $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν τουλάχιστον ένας εκ των x και y είναι ακέραιος ή αν το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο από 1.

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$
3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία το υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσιο
4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του Α. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

Έστω $y \in f(S \cup T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cup T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της ένωσης ισχύει $x \in S$ ή $x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S)$ ή $f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S)$ ή $y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cup f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ (1)

Έστω $y \in f(S) \cup f(T)$. Τότε $y \in f(S)$ ή $y \in f(T)$. Επομένως, υπάρχει $x \in S$ ή $x \in T$ ώστε $f(x) = y$. Από το ορισμό της ένωσης προκύπτει $x \in S \cup T$ και $y = f(x) \in f(S \cup T)$. Συνεπώς, $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει $f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Έστω $y \in f(S \cap T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cap T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της τομής ισχύει $x \in S$ και $x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S)$ και $f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S)$ και $y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cap f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία το υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσιο

Έστω $f : A \to B$ και $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$. Έστω ότι
$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2$. $S = \{1, 2\}, T = \{1, 3\}, S \cap T = \{1\}$
$f(S \cap T) = \{1\}, f(S) = \{1, 2\}, f(T) = \{1, 2\}$

Συνεπώς $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Στο ερώτημα 2 δίνεται το πρώτο σκέλος της απόδειξης. Στο δεύτερο σκέλος θα δειχτεί ότι $f(S) \cap f(T) \subseteq f(S \cap T)$ αν η f είναι 1-1.

Έστω $y \in f(S) \cap f(T)$. Από τον ορισμό της τομής προκύπτει $y \in f(S)$ και $y \in f(T)$. Συνεπώς υπάρχει ένα $x \in S$ και ένα $z \in T$ ώστε $f(x) = y$ και $f(z) = y$. Επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει $x = z$. Συνεπώς, $x \in S$ και $x \in T$ και $x \in S \cap T$. Άρα $y = f(x) \in f(S \cap T)$. Το ζητούμενο αποδείχτηκε $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$

Άπειρα Σύνολα - Ακολουθίες

Ασκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.
2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.
3. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι μη-αριθμήσιμο.

Ασκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

1. Λάθος. Έχει αποδειχτεί μέσω της πρότασης διαγωνιοποίησης του Cantor.

Άσκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.

2. Σωστό. Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ που να είναι 1-1 και επί.

Πράγματι, η συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ με $f(n) = n$, αν n θετικός άρτιος και $f(n) = -(n-1)$, αν n θετικός περιττός όπου S το σύνολο των άρτιων αριθμών, είναι ένα-προς-ένα και επί.

1-1: Αν $f(x) = f(y)$ τότε είτε x άρτιος και y άρτιος, είτε x περιττός και y περιττός, γιατί η εξίσωση $x = -(y-1)$ ισοδύναμα $x + y = 1$ δεν έχει λύσεις, εφόσον $x + y \geq 2$.

Στην πρώτη περίπτωση $x = y$ και στη δεύτερη περίπτωση $-(x-1) = -(y-1)$, άρα $x = y$.

Άσκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Επί: Έστω m θετικός άρτιος. Τότε $m = 2k$ για $k > 0$. Υπάρχει θετικός αρτιος αριθμός $x = 2k$ ώστε $f(x) = 2k = m$

Έστω m αρνητικός άρτιος ή μηδέν. Τότε $m = -2k$ για $k \geq 0$. Υπάρχει θετικός περιττός αριθμός $x = 2k + 1$ ώστε $f(x) = -(2k + 1 - 1) = -2k = m$.

Άσκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

3. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι μη-αριθμήσιμο.

Σωστό. Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο

Το σύνολο των άρρητων αριθμών $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. Έστω ότι το I είναι αριθμήσιμο. Τότε το σύνολο $I \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο ως ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων. Γνωρίζουμε όμως ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη-αριθμήσιμο. Ως εκ τούτου καταλήξαμε σε άτοπο.

Άσκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

Το σύνολο όλων των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Σωστό. Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ που να είναι 1-1 και επί.
Πράγματι, η συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow S$ με $f(n) = n/2$, αν n άρτιος και $f(n) = -(n-1)/2$, αν n περιττός όπου S το σύνολο των άρτιων αριθμών, είναι ένα-προς-ένα και επί.

1-1: Αν $f(x) = f(y)$ τότε είτε x άρτιος και y άρτιος, είτε x περιττός και y περιττός, γιατί η εξίσωση $x/2 = -(y-1)/2$ ισοδύναμα $x + y = 1$ δεν έχει λύσεις, εφόσον $x + y \geq 2$.

Στην πρώτη περίπτωση $x/2 = y/2$, άρα $x = y$
και στη δεύτερη περίπτωση $-(x-1)/2 = -(y-1)/2$, άρα $x = y$.

Άσκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

Το σύνολο όλων των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Επί: Έστω m θετικός. Ο αριθμός μπορεί να γραφτεί και ως $m = 2m/2$. Δηλαδή υπάρχει θετικός αρτιος αριθμός $x = 2m$ ώστε $f(x) = 2m/2 = m$.

Έστω m αρνητικός ή μηδέν. Ο αριθμός μπορεί να γραφτεί και ως $m = -(2k+1-1)/2$ για $k = -m \geq 0$. Δηλάδη υπάρχει θετικός περιττός αριθμός $x = 2k+1$ ώστε $f(x) = -(2k+1-1)/2 = -k = m$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι αν τα A, B σύνολα, $A \subseteq B$ και το A μη αριθμήσιμο, τότε το B είναι μη αριθμήσιμο.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι αν τα A, B σύνολα, $A \subseteq B$ και το A μη αριθμήσιμο, τότε το B είναι μη αριθμήσιμο.

Έστω ότι το B είναι αριθμήσιμο. Τότε τα στοιχεία του B μπορούν να αντιστοιχηθούν με τους θετικούς ακεραίους σχηματίζοντας μια ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Εφόσον το A είναι υποσύνολο του B, θα μπορούσε να επιλεχθεί η υπακολουθία $\{b_n\}$ που περιέχει τα στοιχεία του A, την οποία θα μπορούσαμε να απαριθμήσουμε εκ νέου βάσει της σειράς των στοιχείων που περιέχει. Εφόσον όμως το A είναι μη αριθμήσιμο καταλήξαμε σε άτοπο (ή αλλιώς αντίφαση).

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου S είναι επίσης αριθμήσιμο.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου S είναι επίσης αριθμήσιμο.

Εφόσον το σύνολο S είναι αριθμήσιμο τα στοιχεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν με τους θετικούς ακεραίους σχηματίζοντας μια ακολουθία $s_1, s_2, s_3, \ldots$. Κάθε υποσύνολο του S περιλαμβάνει κάποια (ή κανένα ή όλα) τα στοιχεία αυτής της ακολουθίας, τα οποία επίσης μπορούμε να απαριθμήσουμε βάσει της σειράς με την οποία εμφανίζονται. Έτσι λαμβάνουμε μια ακολουθία πεπερασμένου ή άπειρου μεγέθους που απαριθμεί όλα τα στοιχεία του υποσυνόλου $sub_1, sub_2, \ldots$. Συνεπώς, το υποσύνολο είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

1. Οι ακέραιοι που δεν διαιρούνται με το 3.
2. Οι ακέραιοι που διαιρούνται με το 5 αλλά όχι με το 7.
3. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από μονάδες.
4. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από 1 ή 9.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

1. Οι ακέραιοι που δεν διαιρούνται με το 3.

Το σύνολο είναι αριθμήσιμο. Οι ακέραιοι που περιέχονται στο σύνολο είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7$ κ.ο.κ. Μπορούμε να απαριθμήσουμε αυτούς τους αριθμούς με την εξής σειρά: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 7, -7, \ldots$ λαμβάνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την επιθυμητή αντιστοίχηση 1-1 με τους θετικούς ακεραίους $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, \ldots$.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

2. Οι ακέραιοι που διαιρούνται με το 5 αλλά όχι με το 7.

Το σύνολο είναι αριθμήσιμο. Μπορούμε να το δείξουμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα $\pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20, \pm 25, \pm 30, \pm 40, \pm 45$ κ.ο.κ.

Άσκηση 5

3. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από μονάδες.

Εδώ τα πράγματα είναι λίγο πιο περίπλοκα. Η απάντησή είναι πώς είναι αριθμήσιμο. Για να το δείξουμε αυτό θα πρέπει να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς επί ενός δισδιάστατου πίνακα ως εξής:

$$\begin{array}{llllllll}
.\overline{1} & .1 & .11 & .111 & .1111 & .11111 & .111111 & \dots \\
1.\overline{1} & 1 & 1.1 & 1.11 & 1.111 & 1.1111 & 1.11111 & \dots \\
11.\overline{1} & 11 & 11.1 & 11.11 & 11.111 & 11.1111 & 11.11111 & \dots \\
111.\overline{1} & 111 & 111.1 & 111.11 & 111.111 & 111.1111 & 111.11111 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Ακολουθώντας μια διαδρομή ζιγκ-ζαγκ από το πάνω αριστερά κελί του πίνακα λαμβάνουμε την 1-1 αντιστοίχηση:

$a_1 = .\overline{1}, a_2 = 1.\overline{1}, a_3 = .1, a_4 = .11, a_5 = 1, a_6 = 11.\overline{1}$ κ.ο.κ.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

4. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από 1 ή 9.

Το σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο. Για την απόδειξη ακολουθούμε ακριβώς τη μέθοδο διαγωνιοποίησης του Cantor που χρησιμοποιήσαμε για ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η διαφορά είναι ότι θα κατασκευάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως εξής: $r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots$ όπου $d_i = 1$ όταν $d_{ii} = 9$ και $d_i = 9$ όταν $d_{ii} = 1$ ή δεν υπάρχει δεκαδικό μέρος στον αριθμό. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός ο οποίος δεν βρίσκεται στη λίστα που απαριθμεί τους πραγματικούς με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από 1 ή 9, αφού το δεκαδικό ανάπτυγμά του διαφέρει από το δεκαδικό ανάπτυγμα του i-οστού αριθμού στη λίστα, στην i-οστη θέση δεξιά από την υποδιαστολή. Άτοπο.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση επί $f : S \to P(S)$, το δυναμοσύνολο του S

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση **επί** $f : S \to P(S)$, όπου P(S) το δυναμοσύνολο του S

Θα χρησιμοποιήσουμε μέθοδο απόδειξης με αντίφαση (άτοπο).

Έστω επιμορφισμός $f : S \to P(S)$.

Έστω σύνολο $T = \{x \in S : x \notin f(x)\}$. Δεδομένου ότι το σύνολο T περιλαμβάνει μόνο στοιχεία του S, αποτελεί υποσύνολο του S και συνεπώς $T \in P(S)$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι επί, $\exists t \in S$ έτσι ώστε $f(t) = T$.

1. Αν $t \in T$, επειδή $t \in f(t)$, $t \notin T$. Αντίφαση.
2. Αν $t \notin T$, τότε $t \notin f(t)$ και συνεπώς εξ ορισμού του T, $t \in T$. Αντίφαση.

Συνεπώς, δεν υπάρχει συνάρτηση f από το S στο $P(S)$ που να είναι επί.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε $|S| < |P(S)|$, όπου $P(S)$ το δυναμοσύνολο του S.

Άσκηση 7

Στην προηγούμενη άσκηση αποδείξαμε ότι $|S| \neq |P(S)|$ καθώς δεν υπάρχει συνάρτηση επί από το S στο $P(S)$. Για να δείξουμε ότι $|S| < |P(S)|$ αρκεί να δείξουμε ότι $|S| \leq |P(S)|$, εφόσον έχουμε αποκλείσει την περίπτωση $|S| = |P(S)|$.

Η συνάρτηση $g : S \to P(S)$, $g(x) = \{x\}$ είναι 1-1, συνεπώς $|S| \leq |P(S)|$ και, εφόσον $|S| \neq |P(S)|$, $|S| < |P(S)|$.

(Υποθέτουμε ότι το S δεν είναι το το κενό σύνολο για το οποίο γνωρίζουμε ότι $|S| < |P(S)|$).

Απόδειξη: Έστω $g(x) = g(y)$, τότε $\{x\} = \{y\}$. Καθώς 2 πεπερασμένα σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία συνάγεται ότι $x = y$.

Άσκηση 8

1. Να δείξετε ότι η ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.
2. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 8

1. Να δείξετε ότι η ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Έστω $A_1, A_2, A_3, \ldots$ αριθμήσιμα σύνολα. Εφόσον το σύνολο A_i είναι αριθμήσιμο μπορούμε να παραθέσουμε τα στοιχεία του σε μια ακολουθία $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$. Τα στοιχεία του συνόλου $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ μπορούν τότε να παρατεθούν σε μια ακολουθία ως εξής:

Πρώτα παρατίθενται τα a_{ij} για τα οποία ισχύει $i+j=2$, στη συνέχεια τα στοιχεία με $i+j=3$, στη συνέχεια τα στοιχεία με $i+j=4$, κ.ο.κ.

Άσκηση 8

2. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ είναι αριθμήσιμο.

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ είναι τα $(i, n) : i \in \mathbb{Z}^+$ και $n \in \mathbb{Z}^+$.
Για κάθε $i \in \mathbb{Z}^+$ μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο $A_i = \{(i, n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$.
Προφανώς, $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Συνεπώς, το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ αποτελεί ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων και βάσει του ερωτήματος 1 είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Schröder-Bernstein για να δείξετε ότι τα σύνολα $(0, 1)$ και $[0, 1]$ είναι ισομεγέθη. (Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό αν υπάρχουν συναρτήσεις 1-1 $f : A \to B$ και $g : B \to A$ υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση ανάμεσα στα σύνολα A και B και, συνεπώς, τα σύνολα είναι ισομεγέθη).

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Schröder-Bernstein για να δείξετε ότι τα σύνολα $(0, 1)$ και $[0, 1]$ είναι ισομεγέθη.

Έστω $f : (0, 1) \to [0, 1]$ και $f(x) = x$. Προφανώς η συνάρτηση f είναι 1-1.

Έστω $g : [0, 1] \to (0, 1)$ και $g(x) = (x + 1)/3$. Το εύρος της g είναι το διάστημα $[1/3, 2/3]$ και συνεπώς δεν υπάρχει αντίφαση με τον ορισμό του διαστήματος $(0, 1)$ ως πεδίου τιμών της. Επίσης, η g είναι προφανώς 1-1.

Βάσει του θεωρήματος προκύπτει ότι υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση ανάμεσα στα σύνολα $(0, 1)$ και $[0, 1]$ και, συνεπώς, είναι ισομεγέθη.

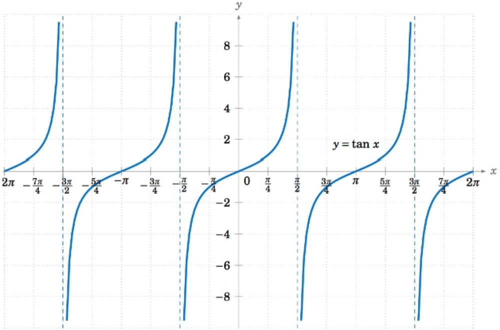
Άσκηση 10

Να δείξετε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein.

Άσκηση 10

Να δείξετε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein.

Αρκεί να βρούμε συναρτήσεις $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to(0,1)$ που να είναι 1-1.
Προφανώς, αν $f(x)=x$, η συνάρτηση f είναι 1-1.
Για τη συνάρτηση g ανακαλούμε την τριγωνομετρική συνάρτηση της εφαπτομένης (tan). Όπως φαίνεται η συνάρτηση $h:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί.

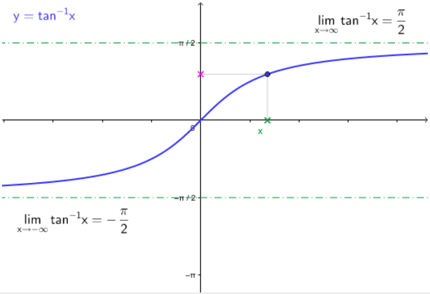


Άσκηση 10

Να δείξετε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein.

Μπορώ να ορίσω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ όπου $g(x) = \frac{tan^{-1}(x)+3}{6}$. Προφανώς $0 < \frac{-\pi/2+3}{6} \leq g(x) \leq \frac{\pi/2+3}{6} < 1$, επομένως η εν λόγω συνάρτηση παίρνει τιμές εντός του καθορισμένου πεδίου τιμών και είναι 1-1.

Βάσει του θεωρήματος Schröder-Bernstein προκύπτει ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη.



Άσκηση 11

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός από το σύνολο των θετικών ακεραίων στο δυναμοσύνολο του συνόλου των θετικών ακεραίων.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός από το σύνολο των θετικών ακεραίων στο δυναμοσύνολο του συνόλου των θετικών ακεραίων.

Όπως έχουμε ξαναπεί κάθε σύνολο A που ανήκει στο δυναμοσύνολο του συνόλου $\mathbb{Z}^+$ μπορεί να αναπαρασταθεί από μια δυαδική συμβολοσειρά $a_1 a_2 a_3 \ldots$, όπου $a_i = 1$ αν το $i \in A$ και $a_i = 0$ αν $i \notin A$.

Έστω ότι υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$. Κατασκευάζουμε νέα συμβολοσειρά $s = s_1 s_2 s_3 \ldots$ θέτοντας το s_i ως το συμπλήρωμα του i-οστού bit του $f(i)$ (όπου 0 θέτουμε 1 και όπου 1 θέτουμε 0). Εφόσον, η συμβολοσειρά s διαφέρει από κάθε $f(i)$ στο i-οστό bit, δεν ανήκει στην εικόνα της f. Συνεπώς, η συνάρτηση f δεν είναι επί, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση (απαγωγή σε άτοπο).

Άσκηση 12

Να δείξετε ότι $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Άσκηση 12

Να δείξετε ότι $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Στην άσκηση 13 δείξαμε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)|$.

Θεώρημα Schröder-Bernstein: αρκεί να υπάρχουν συναρτήσεις $f : (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$ και $g : (0,1) \to (0,1) \times (0,1)$ που να είναι 1-1.

Για την g μπορούμε απλούστατα να θέσουμε $g(x) = (x, 1/2)$ η οποία είναι προφανώς 1-1.

Για την f έστω ότι $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα x και y με τα δεκαδικά τους αναπτύγματα $x = 0.x1x2x3\ldots$ και $y = 0.y1y2y3\ldots$.Δεν επιλέγουμε ποτέ το δεκαδικό ανάπτυγμα αριθμών που τελειώνει με άπειρα 9αρια αλλά το αντίστοιχο πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα.
Θέτουμε $f(x, y) = 0.x1y1x2y2x3y3\ldots$ που είναι προφανώς 1-1.

Άσκηση 13

Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ όπου $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Απαντήστε αν η ακολουθία συγκλίνει και αν ναι ποιο είναι το όριό της.

Άσκηση 13

Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ όπου $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Απαντήστε αν η ακολουθία συγκλίνει και αν ναι ποιο είναι το όριό της.

Διαισθητικά, έστω όριο $L = 2$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N_ε τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N_\varepsilon$, $|a_n - 2| < \varepsilon$.

Εφόσον $|a_n - 2| = |\dfrac{2n+1}{n+1} - 2| = |\dfrac{-1}{n+1}| = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N_\varepsilon}$, μπορούμε να επιλέξουμε $N_\varepsilon = 1/\varepsilon$ ώστε $|a_n - 2| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq N_\varepsilon$.

Αν δεν μπορούμε διαισθητικά να απαντήσουμε, μπορούμε να εργαστούμε αναλυτικά:

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2+1/n}{1+1/n} \text{ και } \lim_{n\to\infty}(2+1/n) = 2, \lim_{n\to\infty}(1+1/n) = 1.$$

Συνεπώς, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2$

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$

Έστω $S_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$2S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$2S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$

$2S_n = 2 + S_n - \frac{1}{2^n}$

$S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{2^n}) = 2$

Συνεπώς, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$

Άσκηση 15

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| \leq |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A.

Άσκηση 15

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| \leq |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A.

Μια συνάρτηση f απεικονίζει κάθε στοιχείο του συνόλου S σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου τιμών και συνεπώς και του $|f(S)|$. Ορίζουμε συνάρτηση $g : f(S) \to S$, έτσι ώστε $f(g(y)) = y$. Προφανώς η συνάρτηση είναι 1-1, εφόσον διαφορετικά η συνάρτηση f δεν θα ήταν καλά ορισμένη. Άρα, $|f(S)| \leq |S|$.

Άσκηση 16

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| = |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A ανν η f είναι 1-1.

Άσκηση 16

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| = |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A ανν η f είναι 1-1.

Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε προφανώς η συνάρτηση $f' : S \to f(S)$ είναι 1-1 και επί και ως εκ τούτου $|f(S)| = |S|$.

Αν $|f(S)| = |S|$ έστω ότι η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν στοιχεία x, y του A και $x \neq y$, τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Τότε $|S| = 2$ και $|f(S)| = 1$ και καταλήξαμε σε αντίφαση.