

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Λογική: Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Άσκηση 1

Ποιες από τα παρακάτω προτάσεις με ποσοδείκτες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς αν το πεδίο είναι οι πραγματικοί αριθμοί:

- a $\forall x(x^2 > x)$
- b $\exists x(x^2 - 2 = 1)$
- c $\exists x(x^2 + 2 = 1)$
- d $\forall x \exists y(x^2 + y = 4)$
- e $\exists y \forall x(x^2 + y = 4)$

Άσκηση 1

Ποιες από τα παρακάτω προτάσεις με ποσοδείκτες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς αν το πεδίο είναι οι πραγματικοί αριθμοί:

- a $\forall x(x^2 > x)$, Ψευδές εφόσον για κάποιο $x < 1$, π.χ. $x = 0.5$, $x^2 = 0.25 < x$
- b $\exists x(x^2 - 2 = 1)$, Αληθές, $x = \sqrt{3}$
- c $\exists x(x^2 + 2 = 1)$, Ψευδές. Για κάθε x , $x^2 > 0 \neq -1$
- d $\forall x \exists y(x^2 + y = 4)$, Αληθές. Αν επιλέξουμε $y = 4 - x^2$ για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει.
- e $\exists y \forall x(x^2 + y = 4)$, Ψευδές. Π.χ. για $x = 0$, το μοναδικό y για το οποίο ισχύει είναι το 4 ενώ όταν $x = 1$, το μοναδικό $y = 3$.

Άσκηση 2

Προσδιορίστε την τιμή αλήθειας της πρότασης $\exists x \forall y (x \leq y^2)$ αν το πεδίο ορισμού και για τις δύο μεταβλητές είναι:

- a οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί
- b οι ακέραιοι
- c οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί

Άσκηση 2

- a Ψευδές, γιατί όσο μικρό και αν επιλέξω το $x (\geq 0)$, υπάρχει $y = \sqrt{x/2}$, για το οποίο $x = 2y^2 \geq y^2$
- b Αληθές, π.χ. $x = -1$
- c Αληθές, π.χ. $x = -1$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το \mathbb{R} :

1. $\forall x \exists y (x^2 = y)$

2. $\forall x \exists y (x = y^2)$

3. $\exists x \forall y (xy = 0)$

4. $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$

5. $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$

6. $\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$

7. $\forall x \exists y (x + y = 0)$

8. $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$

9. $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$

10. $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το \mathbb{R} :

1. $\forall x \exists y (x^2 = y)$

T , για οποιοδήποτε c στο \mathbb{R} , υπάρχει $y = c^2$, οπότε βάσει καθολικής γενίκευσης

2. $\forall x \exists y (x = y^2)$

F , $y^2 \geq 0$ άρα για $x < 0$ δεν ισχύει

3. $\exists x \forall y (xy = 0)$

T , εφόσον αν $x = 0$, $xy = 0$ για κάθε y

4. $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$

F , εφόσον ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος

5. $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$

T , εφόσον αν $x \neq 0$, $y = 1/x$

6. $\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$

F , καθώς για οποιοδήποτε $x = c$ αν $y \neq 1/c$, $xy \neq 1$

7. $\forall x \exists y (x + y = 0)$

T , εφόσον $\forall x, y = -x$

8. $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$

F , Το σύστημα είναι αδύνατο

9. $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$

F , Μοναδική λύση $x = 1, y = 1$

10. $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$

T , προφανώς

Άσκηση 4

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg \forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
2. $\neg (\exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$
3. $\neg \exists x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$
4. $\neg \forall y \exists x \exists z (T(x, y, z) \vee Q(x, y))$

Άσκηση 4

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

- $\neg \forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
- $\neg (\exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$
- $\neg \exists x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$
- $\neg \forall y \exists x \exists z (T(x, y, z) \vee Q(x, y))$

Η πρόταση 1 είναι λογικά ισοδύναμη με

$$\exists x \neg \exists y \forall z T(x, y, z) \equiv \exists x \forall y \neg \forall z T(x, y, z) \equiv \exists x \forall y \exists z \neg T(x, y, z)$$

Η πρόταση 2 είναι λογικά ισοδύναμη με $\neg \exists x \exists y P(x, y) \vee \neg \forall x \forall y Q(x, y) \equiv \forall x \neg \exists y P(x, y) \vee \exists x \neg \forall y Q(x, y) \equiv \forall x \forall y \neg P(x, y) \vee \exists x \exists y \neg Q(x, y)$

Η πρόταση $\neg(p \leftrightarrow q)$ είναι αληθής όταν η p και η q έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $\neg p \leftrightarrow q$

Συνεπώς η πρόταση 3, $\forall x \forall y \neg (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x)) \equiv \forall x \forall y (\neg Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$

Η πρόταση 4 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists y \forall x \forall z \neg (T(x, y, z) \vee Q(x, y)) \equiv \exists y \forall x \forall z (\neg T(x, y, z) \wedge \neg Q(x, y))$

Άσκηση 5

Έστω $P(x)$ το κατηγορήμα «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ το κατηγορήμα «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

- α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό.
- β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής.
- γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό.
- δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό.
- ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.

Άσκηση 5

Έστω $P(x)$ το κατηγορήμα «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ το κατηγορήμα «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό. $\exists x P(x)$

β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$

γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό. $\forall y Q(y)$

δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό. $\forall x P(x)$

ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.

$\exists y \neg Q(y)$

Άσκηση 6

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \forall z ((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Άσκηση 6

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \forall z ((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Οποιοδήποτε πεδίο έχει δύο ακριβώς στοιχεία a και b , αν $x \neq y$ για κάθε x και για κάθε y , τότε είτε $x = a$ και $y = b$ είτε $x = b$ και $y = a$. Άρα για κάθε z εκ των a, b $(z = x) \vee (z = y)$.

Έστω πεδίο με τρία τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία a, b, c . Αν $x = a$ και $y = b$ τότε υπάρχει $z = c$ για το οποίο δεν είναι αληθής η πρόταση $(z = x) \vee (z = y)$.

Άσκηση 7

Έστω $P(m, n)$ το κατηγορήμα «ο m διαιρεί τον n », όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

$$\alpha) P(4, 5)$$

$$\delta) \exists m \forall n P(m, n)$$

$$\beta) P(2, 4)$$

$$\epsilon) \exists n \forall m P(m, n)$$

$$\gamma) \forall m \forall n P(m, n)$$

$$\sigma\tau) \forall n P(1, n)$$

Άσκηση 7

Έστω $P(m, n)$ το κατηγορήμα «ο m διαιρεί τον n », όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

- | | |
|---|---|
| α) $P(4, 5)$ | δ) $\exists m \forall n P(m, n)$ |
| β) $P(2, 4)$ | ε) $\exists n \forall m P(m, n)$ |
| γ) $\forall m \forall n P(m, n)$ | στ) $\forall n P(1, n)$ |

α. Ψευδής

β. Αληθής

γ. Ψευδής, π.χ. αντιπαράδειγμα α.

δ. Αληθής, $m = 1$.

ε. Ψευδής, για κάθε n στο πεδίο αν επιλέξω $m = n + 1$ δεν τον διαιρεί. Άρα είναι αληθής η άρνηση της πρότασης $\forall n \exists m \neg P(m, n)$.

στ. Αληθής

Άσκηση 8

Είναι οι παρακάτω προτάσεις ψευδείς; Δώστε ένα αντιπαράδειγμα, αν είναι δυνατό. Το πεδίο είναι οι ακέραιοι αριθμοί.

- a $\forall x \exists y (x = 1/y)$
- b $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$
- c $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$

Άσκηση 8

Είναι οι παρακάτω προτάσεις ψευδείς; Δώστε ένα αντιπαράδειγμα, αν είναι δυνατό. Το πεδίο είναι οι ακέραιοι αριθμοί.

- a $\forall x \exists y (x = 1/y)$. Ψευδής. Π.χ. για $x = 2$, $y = 1/2 \notin \mathbb{Z}$
- b $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$ Ψευδής. Π.χ. για $x = -200$, $y^2 < -100$ που είναι αδύνατο.
- c $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$ Ψευδής. Π.χ. $x = 0$, $y = 0$.

Άσκηση 9

Ναδειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 9

Ναδειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ και $\forall x\forall y (P(x) \vee Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Για να αποδειχτεί η λογική ισοδυναμία πρέπει να αποδειχτεί ότι η πρόταση $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \leftrightarrow \forall x\forall y (P(x) \vee Q(y))$ είναι ταυτολογία.

1. Αν $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x\forall y (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.

Έστω $\forall xP(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x\forall y (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.

Έστω $\forall xQ(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x\forall y (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.

2. Αν $\forall x\forall y (P(x) \vee Q(y))$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ αληθής.

Αν $\forall xP(x)$ αληθής, $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ αληθής. Διαφορετικά $\exists x_0$ έτσι ώστε $P(x_0)$ ψευδής. Τότε όμως $\forall y (P(x_0) \vee Q(y))$ αληθής και άρα $\forall yQ(y)$ αληθής. Συνεπώς, $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ αληθής.

Άσκηση

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ το κατηγορήμα «Ο x είναι κοντότερος του y ». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Άσκηση

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ το κατηγορήμα «ο x είναι κοντότερος του y ». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Από την υπόθεση $\exists s S(s, Max)$ δεν προκύπτει το συμπέρασμα $S(Max, Max)$