

Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Φεβρουάριος 2025

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B/10, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω διανύσματα $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι:

- (α) Αν για κάθε διάνυσμα $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{p}$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. [5 βαθμοί]
 (β) Αν για κάθε διάνυσμα $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι $\mathbf{a} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{p}$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. [5 βαθμοί]

Θέμα 2: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (α) Είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}^2$; [5 βαθμοί]
 (β) Είναι η συνάρτηση f κλάσης C^1 στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή είναι η παράγωγος Df καλά ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}^2$); [10 βαθμοί]
 (γ) Υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ($f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$) στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$; Ισχύει η ισότητα $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$; [5 βαθμοί]

Δικαιολογήστε επαρκώς τις απαντήσεις σας.

Θέμα 3: Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της $f(x, y, z) = xyz$ κατά την κατεύθυνση που είναι κάθετη στην επιφάνεια $yx^2 + xy^2 + yz^2 = 3$ στο σημείο $(1, 1, 1)$. [10 βαθμοί]

Θέμα 4:

- (α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 y + xy^3 - xy$, και να τα ταξινομήσετε ως τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία. [10 βαθμοί]
 (β) Για κάθε κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) με $x_0 y_0 > 0$ στο (α) υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ γύρω από το σημείο (x_0, y_0) που περιλαμβάνει έως και τετραγωνικούς όρους. Εξετάζοντας το πρόσημο της διαφοράς $f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0)$ για όλα τα δx και δy , $(\delta x, \delta y) \neq (0, 0)$, με ακριβώς μικρή απόλυτη τιμή, επιβεβαιώστε το συμπέρασμα σας στο (α). [5 βαθμοί]

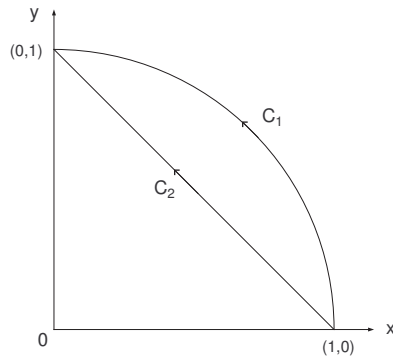
Θέμα 5: (α) Έστω $\phi(r, \theta)$ παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο στο επίπεδο, όπου (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες. Δείξτε ότι η κλίση του ϕ είναι:

$$\nabla \phi(r, \theta) = \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta$$

όπου $\mathbf{u}_r$ και $\mathbf{u}_\theta$ τα μοναδιαία διανύσματα στην ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση, αντίστοιχα. Υπόδειξη: Εκφράστε το πεδίο $\nabla \phi$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και εφαρμόστε τον κανόνα της αλυσίδας. [10 βαθμοί]

(β) Έστω το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}(r, \theta) = \sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \theta \mathbf{u}_\theta$. Κατασκευάζοντας κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού δείξτε ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα σας στο (α) η μεταχηματίστε το $\mathbf{F}$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . [5 βαθμοί]

Επιβεβαιώστε το συμπέρασμα σας υπολογίζοντας τα επικαμπύλια ολοκληρώματα: $I_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ και $I_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ κατά μήκος της καμπύλης C_1 (τόξο μοναδιαίου κύκλου) και της καμπύλης C_2 (ευθύγραμμο τμήμα) όπως σχεδιάζονται στο Σχήμα 1, (i) με άμεσο υπολογισμό, και (ii) χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δυναμικού.



Σχήμα 1: Διαδρομή ολοκλήρωσης C_1 και C_2 (Θέμα 5)

[10 βαθμοί]

Θέμα 6: Να σχεδιάσετε τις περιοχές ολοκλήρωσης και να υπολογίσετε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3) dy dx \text{ και } I_2 = \iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) : y^2 \leq 2x + 6, y \geq x - 1\}$$

[10+10 βαθμοί]

Θέμα 7: Έστω S η επιφάνεια κυλίνδρου που ορίζεται ως: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, όπου

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}, \quad S_2 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ και } S_3 = \{(x, y, -1) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Έστω επίσης διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

- (α) Με χρήση διπλών (επιφανειακών) ολοκληρωμάτων να υπολογίσετε την ροή του πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσω των τριών επιφανειών S_1 , S_2 και S_3 . Ο προσανατολισμός κάθε επιφάνειας S_i , $i = 1, 2, 3$, είναι ο αντίστοιχος θετικός προσανατολισμός της επιφάνειας S . Ποιά είναι η ροή του πεδίου $\mathbf{F}$ διαμέσω της επιφάνειας S ;

[10 βαθμοί]

- (β) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Gauss, υπολογίστε πάλι την ροή του $\mathbf{F}$ διαμέσω της επιφάνειας S και επιβεβαιώστε το αντίστοιχο αποτέλεσμα σας στο ερώτημα (α).

[10 βαθμοί]

- (γ) Να επαληθεύσετε το Θεώρημα Stokes:

$$\iint_{S_i} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

για $i = 2, 3$, όπου ∂S_i το σύνορο της επιφάνειας S_i με κατάλληλο προσανατολισμό.

[5 βαθμοί]

Υπόδειξη: Οι υπολογισμοί απλοποιούνται αν εργαστείτε σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ και $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ίσως φανούν χρήσιμες.