

Ανάλυση II: Θέματα Εξετάσεων, Ιούνιος 2024

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B/10, 10)$ όπου B το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: (α) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια $z = x^2 + y^4$ στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. [10 βαθμοί]

Θέμα 2: (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$. Δείξτε απευθείας από τον ορισμό ($\epsilon - \delta$) ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. (β) Έστω $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ δεν υπάρχει. [10 βαθμοί]

Θέμα 3: Έστω ότι η $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη. Εφαρμόζοντας στην $f(x, y, z)$ την αντικατάσταση: $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$ (όπου r , θ και ϕ είναι οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες), υπολογίστε τις $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ και $\frac{\partial f}{\partial \phi}$ συναρτήσεις των $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$. [15 βαθμοί]

Θέμα 4: Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$, και να τα ταξινομήσετε ως τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας από το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από κάθε κρίσιμο σημείο που περιλαμβάνει (έως και) τετραγωνικούς όρους. [20 βαθμοί]

Θέμα 5: (α) Για κάθε ένα από τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα να σχεδιάσετε την περιοχή ολοκλήρωσης και να τα υπολογίσετε:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \quad \text{και} \quad I_2 = \int_0^1 \int_{y^2}^1 e^{x^{3/2}} dx dy$$

Υπόδειξη: Μετασχηματίστε το I_1 σε πολικές συντεταγμένες. Αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης στο I_2 . (β) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I_3 = \iint_R (x^2 - xy + y^2) dx dy, \quad \text{όπου} \quad R = \{(x, y) : x^2 - xy + y^2 \leq 2\}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αλλαγή μεταβλητών: $x = \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v$. [15 βαθμοί]

Θέμα 6: Έστω συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμες). (α) Δείξτε ότι: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ όπου ∇f η κλίση της f . (β) Δείξτε ότι για κάθε απλή κλειστή διαδρομή C στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, $\int_C f\nabla(g) \cdot ds = - \int_C g\nabla(f) \cdot ds$. [10 βαθμοί]

Θέμα 7: Έστω $\mathbf{F}(x, y)$ το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. (α) Υπολογίστε (με άμεσο τρόπο) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ όπου C η (κλειστή) διαδρομή που έχει θετικό προσανατολισμό και ορίζεται ως η ένωση των καμπυλών $C_1 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$, $C_2 = \{(\sqrt{1-y^2}, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ και $C_3 = \{(0, 1-y) : 0 \leq y \leq 1\}$. (β) Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας στο (α) με εφαρμογή του Θεωρήματος Green ή Stokes (δηλαδή υπολογίζοντας κατάλληλο διπλό ολοκλήρωμα επιφάνειας). (γ) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό και υπολογίστε την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού. (δ) Σχεδιάζοντας το πεδίο $\mathbf{F}$ κατά μήκος της διαδρομής C εξηγήστε το αποτέλεσμα σας στο (α). [20 βαθμοί]

Θέμα 8: (α) Έστω S κλειστή θετικά-προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z)$ κλάσης C^2 . Δείξτε ότι $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Gauss (ή με άλλο τρόπο) δείξτε επίσης ότι $\int \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = 0$ όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο στο στοιχείο επιφάνειας dS με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της S . (β) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Gauss (ή με άλλο τρόπο) υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, όπου $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, S η επιφάνεια του (ανοικτού) ημισφαιρίου $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ και $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο στο στοιχείο επιφάνειας dS τέτοιο ώστε $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$. Υπόδειξη: Έστω $S_0 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ η 'βάση' του ημισφαιρίου και $S' = S \cup S_0$. Εφαρμόστε το Θεώρημα Gauss στην κλειστή επιφάνεια S' . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε (χωρίς απόδειξη) ότι ο όγκος σφαίρας ακτίνας a είναι ίσος με $\frac{4}{3}\pi a^3$. [20 βαθμοί]