

Παρατήρηση: Στον υπολογισμό ενός ορίου μέσω θεώρησης πολικών συντεταγμένων

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$$

αν προκύψει $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = l$, όπου το l είναι ανεξάρτητο της γωνίας ϕ , αυτό σημαίνει ότι κατά μήκος οποιασδήποτε ημιευθείας με αρχή το O , το όριο είναι ίσο με l . Δεν μπορούμε όμως να αποφασίσουμε αν υπάρχει ή όχι το όριο στην περίπτωση αυτή, αφού μπορεί να είναι διαφορετικό κατά μήκος κάποιας καμπύλης που περνά από την αρχή των αξόνων. Αν όμως υπάρχει, θα είναι ίσο με l .

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί, αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \phi \sin \phi}{\rho^4 \cos^4 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos^2 \phi \sin \phi}{\rho^2 \cos^4 \phi + \sin^2 \phi} = 0$

Εφαρμογή 2.1.6. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[xy \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right] \quad \text{ii. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{iii. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^2}{2x^4 + 3y^2}$$

i. Ισχύει ότι: $\left| xy \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right| = |xy| \cdot \left| \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right| \leq |xy|$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy) = 0$. Άρα, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[xy \sin \left(\frac{1}{y} \right) \right] = 0$

ii. Θέτουμε $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$
- $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow[(xy \neq 0)]{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

Άρα, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \cdot 0 = 0$

iii. Παρατηρούμε ότι στο κλάσμα η μεταβλητή x εμφανίζεται σε διπλάσια δύναμη από την y . Στην περίπτωση αυτή θα πάρουμε το όριο κατά μήκος της καμπύλης $y = \lambda x^2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = \lambda x^2}} \frac{x^4 - y^2}{2x^4 + 3y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \lambda^2 x^4}{2x^4 + 3\lambda^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \lambda^2}{2 + 3\lambda^2} = \frac{1 - \lambda^2}{2 + 3\lambda^2}$$

Δηλαδή το όριο εξαρτάται από το λ , άρα από τη διαδρομή, και συνεπώς το όριο δεν υπάρχει.

Εφαρμογή 2.1.7. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων για $(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)$.

$$\text{i. } f(x,y,z) = \frac{2x^2 + 3yz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{ii. } f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ενεργούμε παρόμοια με την περίπτωση 2 μεταβλητών. Υποθέτουμε πρώτα ότι το (x, y, z) τείνει στο $(0, 0, 0)$ κατά μήκος κάποιας ευθείας διαδρομής, η οποία ορίζεται στον 3D χώρο από το διάνυσμα $\mathbf{n} = (\kappa, \lambda, \mu)$. Αν $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, τότε

$$\overrightarrow{OM} \parallel \mathbf{n} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = t\mathbf{n} \Rightarrow (x, y, z) = t(\kappa, \lambda, \mu) \Rightarrow \{x = t\kappa, y = t\lambda, z = t\mu\}$$

όπου κ, λ, μ σταθεροί αριθμοί (για ορισμένη διεύθυνση) και $t \rightarrow 0$ όταν $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$. Άρα, κατά μήκος της διεύθυνσης του $\mathbf{n} = (\kappa, \lambda, \mu)$ έχουμε $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t\kappa, t\lambda, t\mu)$

Παρατήρηση: Αν το όριο αυτό εξαρτάται από τα κ, λ, μ , τότε εξαρτάται και από τη διαδρομή, άρα δεν υπάρχει. Διαφορετικά, υπολογίζεται.

$$i. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + 3yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t\kappa)^2 + 3(t\lambda)(t\mu)}{(t\kappa)^2 + (t\lambda)^2 + (t\mu)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(2\kappa^2 + 3\lambda\mu)}{t^2(\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2)} = \frac{2\kappa^2 + 3\lambda\mu}{\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2}, \text{ δηλαδή το όριο δεν υπάρχει}$$

$$ii. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t\kappa)(t\lambda)(t\mu)}{(t\kappa)^2 + (t\lambda)^2 + (t\mu)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\kappa\lambda\mu)}{\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2} = 0, \text{ δηλαδή αν το όριο υπάρχει, θα είναι ίσο με } 0$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &= \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{|xyz|}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{|y|}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{|z|}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &\leq \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{|y|}{\sqrt[3]{y^2}} \frac{|z|}{\sqrt[3]{z^2}} \\ &= \sqrt[3]{|x|} \sqrt[3]{|y|} \sqrt[3]{|z|} \\ &= \sqrt[3]{|xyz|} \xrightarrow{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} 0 \end{aligned}$$

Άρα, το ζητούμενο όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0.

Εφαρμογή 2.1.8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\forall \lambda > 0$ με $\lambda \neq 1$, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^\lambda)$ υπάρχει.

ii. Να αποδείξετε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

$$i. f(x, x^\lambda) = \frac{x^{\lambda+1}}{x - x^\lambda} \text{ για } x \neq 0 \text{ και } x \text{ κοντά στο } 0$$

Παίρνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda > 1$: $f(x, x^\lambda) = \frac{x^{\lambda+1}}{x - x^\lambda} = \frac{x^\lambda}{1 - x^{\lambda-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1 - 0} = 0$
- Αν $0 < \lambda < 1$: $f(x, x^\lambda) = \frac{x^{\lambda+1}}{x - x^\lambda} = \frac{x}{x^{\lambda-1} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{0 - 1} = 0$

$$ii. \text{ Παρατηρούμε ότι } f(x, \mu x) = \frac{\mu x^2}{(1 - \mu)x} = \frac{\mu x}{1 - \mu} \xrightarrow{\mu \neq 1, x \rightarrow 0} 0.$$

Σκέψη: Αν κατά μήκος κάποιας καμπύλης $y = g(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ και $f(x, g(x)) = 1$, $\forall x$ κοντά στο 0 με $x \neq 0$, τότε προφανώς $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, g(x)) = 1$, και άρα δεν μπορεί να ισχύει $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, $\forall y \neq x$, διότι προσεγγίζοντας από τη διαδρομή $(x, g(x))$ πλησιάζουμε στο 1 και όχι στο 0.

Έχουμε $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{x}{x+1}$ και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x, \frac{x}{x+1}\right) = 1$. Άρα, βάσει των παραπάνω δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Εφαρμογή 2.1.9. Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2} & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Για $(x, y) \neq (0, 0)$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών. Για $(x, y) = (0, 0)$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} = f(0, 0)$$

Άρα, η f είναι συνεχής παντού.

2.2 Η μερική παράγωγος συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό υποσύνολο και $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση. Τότε, οι

$$\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n$$

δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της f ως προς την πρώτη, δεύτερη, ..., n -οστή μεταβλητή είναι οι πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, οι οποίες στο σημείο $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, ορίζονται από τις

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

αν τα όρια υπάρχουν, όπου $1 \leq j$ και $\mathbf{e}_j$ είναι το j -οστό κανονικό βασικό διάνυσμα, δηλαδή $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, με το 1 να βρίσκεται στην j -οστή θέση.

Εφαρμογή 2.2.1. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων ως προς όλες τις μεταβλητές.

i . $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

ii . $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2y^2 - z^2, ex^y - \cos z, xyz)$

i . Διατηρώντας το y σταθερό, έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x^2 + y^2) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = -2x \sin(x^2 + y^2)$$

Διατηρώντας το x σταθερό, έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cos(x^2 + y^2) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = -2y \sin(x^2 + y^2)$$

ii . Δουλεύοντας με όμοιο τρόπο, προκύπτουν τα εξής:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (2x^2y^2 - z^2), \frac{\partial}{\partial x} (xe^y - \cos z), \frac{\partial}{\partial x} (xyz) \right) = (4xy^2, e^y, yz)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} (2x^2y^2 - z^2), \frac{\partial}{\partial y} (xe^y - \cos z), \frac{\partial}{\partial y} (xyz) \right) = (4x^2y, xe^y, xz)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z} (2x^2y^2 - z^2), \frac{\partial}{\partial z} (xe^y - \cos z), \frac{\partial}{\partial z} (xyz) \right) = (-2z, \sin z, xy)$$

Εφαρμογή 2.2.2. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Για $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε ρητή συνάρτηση με παρανομαστή διάφορο του μηδενός. Άρα, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x, f_y, \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{και} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Στο $(0, 0)$ εφαρμόζουμε τον ορισμό:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2 \cdot 0}{x^2 + 0^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 0^2 \cdot y}{0^2 + y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

Ορισμός. Αν $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, κλίση της στο (x, y, z) είναι το διάνυσμα στον χώρο $\mathbb{R}^3$ που δίνεται από την

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Το διάνυσμα αυτό συμβολίζεται και με ∇f ή $\nabla f(x, y, z)$. Δηλαδή, η ∇f είναι απλώς ο πίνακας της παραγώγου $\mathbf{D}f$, γραμμένος ως διάνυσμα.

Ορισμός. Αν $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο $\mathbf{x}_0$ στην κατεύθυνση ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ δίνεται από τον τύπο

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) \right|_{t=0}$$

Επίσης, είναι προφανές από τον ορισμό ότι δίνεται και από τον τύπο

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

Όταν η f είναι μία συνήθης συνάρτηση — δηλαδή πολυωνυμική, ρητή, τριγωνομετρική, εκθετική ή άλλης αντίστοιχης μορφής — και επομένως παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f μπορεί να υπολογιστεί και με τον ακόλουθο τρόπο:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{df}{d\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad \text{όπου } \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \text{ το μοναδιαίο διάνυσμα του } \mathbf{u}.$$

Εφαρμογή 2.2.3. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x, y) = x^2 + 2xy$ στη θέση $A(1, -2)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{n} = (3, 4)$.

Το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{n} = (3, 4)$ είναι $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Άρα, το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbf{n}$ είναι το

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Η κλίση ∇f (ή $\text{grad} f$) της συνάρτησης f είναι

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x + 2y, 2x)$$

και στο $A(1, -2)$ είναι $\nabla f|_A = (-2, 2)$. Επομένως, η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι

$$D_{\mathbf{n}}f|_A = \frac{df}{d\mathbf{n}}|_A = \nabla f|_A \cdot \hat{\mathbf{n}} = (-2, 2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Εφαρμογή 2.2.4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = y^2z^2 - x^2$ και $A(2, -1, 3)$. Να βρεθεί η κατεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο σημείο A γίνεται μέγιστη. Να βρεθεί η μέγιστη αυτή τιμή.

Γενικά, μία διεύθυνση μπορεί να οριστεί από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$.

Έστω διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$. Τότε, η παράγωγος της f στο A κατά κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$ είναι

$$D_{\mathbf{n}}f|_A = \frac{df}{d\mathbf{n}}|_A = \nabla f|_A \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{όπου} \quad \nabla f|_A = (-2x, 2yz^2, 2y^2z)|_{(2, -1, 3)} = (-4, -18, 6)$$

Άρα,

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}|_A = \|\nabla f|_A\| \cdot \|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot \cos \theta = \sqrt{376} \cos \theta$$

Η ποσότητα αυτή μεγιστοποιείται όταν $\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$. Δηλαδή, τα διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}$, $\nabla f|_A$ να είναι ομόρροπα. Επειδή το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι μοναδιαίο, έπεται ότι είναι και το αντίστοιχο μοναδιαίο του $\nabla f|_A$, άρα

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f|_A}{\|\nabla f|_A\|} = \frac{1}{\sqrt{137}}(-4, -18, 6)$$

Παρατήρηση: Η κλίση ∇f της f σε ένα σημείο είναι το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του οποίου η συνάρτηση f παρουσιάζει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής στο σημείο αυτό.