

2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

2.1 Γεωμετρία Συναρτήσεων

Ορισμός. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Η συνάρτηση f απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in A$ σε ένα μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{y} \in B$. Το $\mathbf{y}$ καλείται εικόνα του $\mathbf{x}$ και γράφουμε $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Εικόνα του συνόλου A καλείται το σύνολο $f(A) := \{\mathbf{y} \in B \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in A\}$.

Βαθμωτή / Πραγματική συνάρτηση: $m = 1$ - Σύνολο τιμών της συνάρτησης: $\mathbb{R}$

Παράδειγμα 1: $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$
 $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$

Παράδειγμα 2: $T \equiv T(x, y, z)$ θερμοκρασία
 $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Διανυσματική συνάρτηση: $m > 1$

Παράδειγμα 1: $\mathbf{g} : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_2 x_3 x_4, \sqrt{x_1^2 + x_5^2})$
 $\mathbf{g} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Παράδειγμα 2: $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}(x, y, z, t)$ ταχύτητα
 $\mathbf{V} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Εφαρμογή 2.1.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{y^2 - x^2}$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x, y \neq -x\}$

ii. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

iii. $h(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

$D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

iv. $s(x, y) = (y - x)^{x^2}$

$D_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$

Ορισμός. Γράφημα συνάρτησης $f : A \rightarrow B$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, καλείται το σύνολο $G := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

$\frac{n}{m}$	1	2
1	Καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$	Επιφάνεια στον $\mathbb{R}^2$
2	Καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$	

Για την απεικόνιση γραφημάτων σε περισσότερες από 3 διαστάσεις αξιοποιούμε τα σύνολα στάθμης. Για παράδειγμα, έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Σύνολο στάθμης της f είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant}\} \longrightarrow \text{σφαίρες στον } \mathbb{R}^3$$

Ορισμός. Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, και $c \in \mathbb{R}$. Τότε, το σύνολο στάθμης με τιμή c ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} \in U$ στα οποία $f(\mathbf{x}) = c$. Αν $n = 2$, μιλάμε για καμπύλες στάθμης (με τιμή c), αν $n = 3$, μιλάμε για επιφάνειες στάθμης. Συμβολικά, το σύνολο στάθμης με τιμή c γράφεται

$$\{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα: Περιγράψτε το γράφημα της δευτεροβάθμιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)$. Το γράφημα είναι το παραβολοειδές εκ περιστροφής $z = x^2 + y^2$, προσανατολισμένο από την αρχή των αξόνων προς τα πάνω γύρω από τον άξονα z . Εδώ $n = 2$, επομένως τα ισοσταθμικά σύνολα είναι καμπύλες της μορφής

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\} \longrightarrow \text{κύκλοι με ακτίνα } \sqrt{c} \text{ και κέντρο την αρχή των αξόνων}$$

Για $c < 0$, η καμπύλη στάθμης είναι κενή. $\square$

Παράδειγμα: Περιγράψτε το γράφημα της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 - z^2)$. (Σάγμα)

Οι ισοσταθμικές επιφάνειες περιγράφονται ως

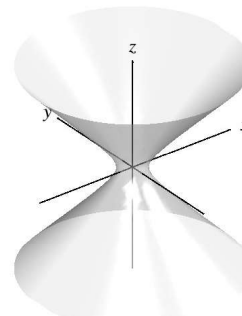
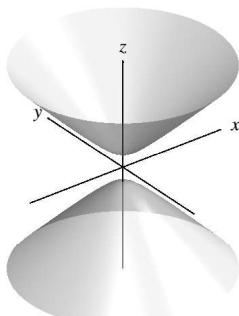
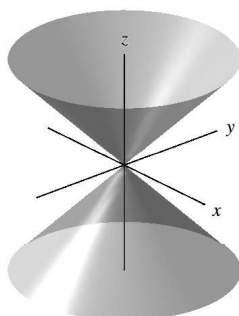
$$L_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

c	Εξίσωση	Γράφημα	Σημεία τομής
0	$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$	κώνος με κέντρο τον άξονα z	με τον άξονα z : $(0, 0, 0)$
$-\alpha^2 < 0$	$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + \alpha^2}$	υπερβολοειδές από δύο μέρη γύρω από τον άξονα z	με τον άξονα z : $(0, 0, \pm\alpha)$
$\beta^2 > 0$	$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - \beta^2}$	μονοκόμματο υπερβολοειδές εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα z	με το επίπεδο xy : $x^2 + y^2 = \beta^2$

(i)

(ii)

(iii)



Σχήμα 1: (i) $c = 0$, (ii) $c = -2$, (iii) $c = 2$

2.2 Όρια και Συνέχεια

Βασικές έννοιες

- **Ανοιχτός δίσκος ή ανοιχτή σφαίρα/μπάλα ακτίνας $r \in \mathbb{R}_+$:** $D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$
 $n = 1$: $D_r = (x_0 - r, x_0 + r)$
 $n = 2$: D_r = εσωτερικό του δίσκου με κέντρο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ και ακτίνα r
 $n = 3$: D_r = εσωτερικό της μπάλας με κέντρο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνα r
- **Ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$:** Για κάθε σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$.
- **(Θεώρημα)** Για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, ο $D_r(\mathbf{x}_0)$ είναι ανοιχτό σύνολο.
- **Παραδοχή:** Το κενό σύνολο είναι ανοιχτό.
- **Συνοριακό σημείο ανοιχτού συνόλου A :** Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται συνοριακό σημείο του A , αν σε κάθε περιοχή του $\mathbf{x}$ υπάρχουν τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον ένα σημείο εκτός του A . Ένα σημείο $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο ενός ανοιχτού συνόλου A αν το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο A και κάθε περιοχή του $\mathbf{x}$ έχει μη κενή τομή με το A .
- **Κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$:** $\partial A \subseteq A$
- $\partial D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\}$
 $\overline{D}_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Διασθητικά, το σύνολο είναι ανοιχτό, γιατί κανένα σημείο του συνόρου, $x = 0$, δεν περιέχεται στο σύνολο. Για να δείξουμε ότι το A είναι ανοιχτό, δείχνουμε ότι για κάθε $(x, y) \in A$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε $D_r(x, y) \subset A$. Αν $(x, y) \in A$, τότε $x > 0$. Διαλέγουμε $r = x$. Αν $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, έχουμε

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x \Rightarrow |x_1 - x| < x \Rightarrow -x < x_1 - x < x \Rightarrow 0 < x_1 < 2x$$

Αποδείξαμε ότι $x_1 > 0$, δηλαδή $(x_1, y_1) \in A$. Επομένως, $D_r(x, y) \subset A$, και το A είναι ανοιχτό. $\square$

Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω σταθερό σημείο B με συντεταγμένες $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$, και M_ν με συντεταγμένες $\mathbf{x}_\nu = (x_{1\nu}, x_{2\nu}, \dots, x_{m\nu})$, $\nu \in \mathbb{N}$, σημείο του U . Οι συντεταγμένες του σημείου $\mathbf{x}_\nu$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών με όρια

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} x_{1\nu} = b_1, \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} x_{2\nu} = b_2, \quad \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} x_{m\nu} = b_m$$

Επομένως, έχουμε την ακολουθία σημείων $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} M_\nu = B$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες ακολουθίες σημείων καθεμία από τις οποίες έχει όριο το σημείο B .

Ορισμός. Έστω $(\mathbf{x}_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, ακολουθία διανυσμάτων με $\mathbf{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι $\mathbf{x}_\nu \rightarrow \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, καθώς $\nu \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > N$ έχουμε $\|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}\| < \epsilon$.

Ισοδύναμα, $\mathbf{x}_\nu \rightarrow \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, καθώς $\nu \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$, δηλαδή αν για αυθαίρετα μικρό $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon)$ ώστε κάθε σημείο $\mathbf{x}_\nu$, $\nu > N$ να βρίσκεται εντός της σφαίρας με κέντρο $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα ϵ .

Για τη μελέτη του ορίου $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

I. Θεωρούμε διάφορες διαδρομές (π.χ. με χρήση πολικών συντεταγμένων ή θεωρώντας κατάλληλες καμπύλες), οπότε:

- αν κατά μήκος αυτών προκύπτουν διαφορετικά όρια της συνάρτησης, τότε το όριο δεν υπάρχει·
- αν τα όρια είναι ίσα μεταξύ τους κατά μήκος των διαδρομών αυτών και ίσα με l , τότε είναι πιθανόν να υπάρχει το όριο της συνάρτησης, και αν υπάρχει θα είναι ίσο με l .

II. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) - l$ και χρησιμοποιώντας γνωστές ανισοτικές σχέσεις, προσπαθούμε να δείξουμε ότι $f(x, y) - l \rightarrow 0$.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου A ανοιχτό σύνολο. Έστω $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$, και N μια περιοχή του $\mathbf{b}$ στον $\mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f είναι τελικά στην N καθώς το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$, αν υπάρχει περιοχή U του $\mathbf{x}_0$ τέτοια, ώστε αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in U$ και $\mathbf{x} \in A$, να είναι $f(\mathbf{x}) \in N$. Λέμε ότι το $f(\mathbf{x})$ τείνει στο $\mathbf{b}$ όταν το $\mathbf{x}$ τείνει στο $\mathbf{x}_0$, και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

αν για οποιαδήποτε περιοχή N του $\mathbf{b}$, η f είναι τελικά στην N καθώς το $\mathbf{x}$ τείνει στο $\mathbf{x}_0$.

Παράδειγμα: Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, όπου $g : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Θεώρημα. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$. Τότε, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ αν και μόνο αν για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ που ικανοποιεί την $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, να έχουμε $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \epsilon$.

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$.

Εδώ η f είναι άθροισμα τριών συναρτήσεων. Το όριο ενός αθροίσματος είναι το άθροισμα των ορίων, και το όριο ενός γινομένου είναι το γινόμενο των ορίων. Άρα,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2 + y^2 + 2) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^2 \right) + \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y^2 \right) + 2 = 0^2 + 1^2 + 2 = 3. \square$$

Παράδειγμα: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$.

Ισχύει: $|x^2| \leq |x^2 + y^2| \Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y|$. Έτσι, για $\epsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \epsilon$ και έχουμε

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |y| < \delta, \text{ και συνεπώς } \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \epsilon. \quad \square$$

Εφαρμογή 2.2.1. Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{3y^2}{x^2 + y^2}$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Θεωρώντας πολικές συντεταγμένες,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \sin \phi, \rho \cos \phi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{3\rho^2 \sin^2 \phi}{\rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} = 3 \sin^2 \phi$$

Το όριο αυτό εξαρτάται από τη γωνία ϕ , επομένως το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Εφαρμογή 2.2.2. Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{2x + y}{x + 3y}$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \neq 0\}$. Θεωρώντας την ευθεία $y = \lambda x$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \lambda x}{x + 3\lambda x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \lambda}{1 + 3\lambda} = \frac{2 + \lambda}{1 + 3\lambda}$$

Το όριο αυτό εξαρτάται από τη διαδρομή, επομένως δεν υπάρχει.

Εφαρμογή 2.2.3. Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{xy^5}{(x^2 + y^2)^2}$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Θεωρώντας πολικές συντεταγμένες,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \sin \phi, \rho \cos \phi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \phi \rho^5 \sin^5 \phi}{(\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi)^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^6 \cos \phi \sin^5 \phi}{\rho^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho \cos \phi \sin^5 \phi) = 0$$

Το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο του ϕ . Επομένως, αν υπάρχει, θα είναι ίσο με 0.

$$\|f(x, y) - 0\| = \left| \frac{xy^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{|x||y^5|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{|x||y^5|}{(0^2 + y^2)^2} = |x||y| = |xy|$$

Όμως, $|xy| \rightarrow 0$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Άρα, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.

Εφαρμογή 2.2.4. Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{x + y}$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}$. Έστω $u = x + y$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1 - u}{u} \stackrel{0}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{1} = 0$$

Το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο του ϕ . Επομένως, αν υπάρχει, θα είναι ίσο με 0.

Εφαρμογή 2.2.5. Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$ για $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει: $|\sin u| \leq |u|$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^3| + |y^3|}{x^2 + y^2} = \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3|}{x^2 + y^2}$$

Όμως, ισχύουν

$$\frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 |x|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |x|}{x^2 + 0^2} = |x|$$

$$\frac{|y^3|}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{y^2 |y|}{0^2 + y^2} = |y|$$

Άρα, τελικά έχουμε: $\left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y|$. Επειδή $|x| + |y| \rightarrow 0$ για $(x,y) \rightarrow (0,0)$, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.