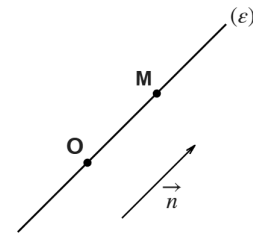


1. Διανυσματικός Λογισμός

1.1 Η εξίσωση ευθείας

Δίνεται ένα σημείο $O(x_o, y_o, z_o)$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Ζητείται η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία περνά από το δοσμένο σημείο και είναι παράλληλη στο δοσμένο διάνυσμα. Δηλαδή, ζητείται η σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου M , ώστε αυτό να βρίσκεται πάνω στην ευθεία.

Αν $M(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας, τότε τα διανύσματα $\mathbf{OM}$, $\mathbf{n}$ είναι παράλληλα. Άρα, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε



$$\begin{aligned}\mathbf{OM} = \lambda \mathbf{n} &\Leftrightarrow (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = \lambda(a, b, c) \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o) = \lambda(a, b, c) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x, y, z)}_{\text{τυχαίο σημείο ευθείας}} = \underbrace{(x_o, y_o, z_o)}_{\text{δοσμένο σημείο από το οποίο περνά η ευθεία}} + \lambda \underbrace{(a, b, c)}_{\text{διάνυσμα στο οποίο είναι παράλληλη η ευθεία}}\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **διανυσματική-παραμετρική** με παράμετρο λ . Σε κάθε τιμή της παραμέτρου λ αντιστοιχεί ένα σημείο (x, y, z) της ευθείας, και αντίστροφα.

Η διανυσματική παραμετρική εξίσωση (1.1.1) μπορεί ακόμη να γραφτεί στη μορφή

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_o + \lambda a, y_o + \lambda b, z_o + \lambda c) \Leftrightarrow \{x = x_o + \lambda a, y = y_o + \lambda b, z = z_o + \lambda c\} \quad (1.1.2)$$

που αποτελεί την εξίσωση της ευθείας στην **αναλυτική-παραμετρική** μορφή.

Αν λύσουμε τις εξισώσεις της (1.1.2) ως προς λ , παίρνουμε

$$\lambda = \frac{x - x_o}{a}, \quad \lambda = \frac{y - y_o}{b}, \quad \lambda = \frac{z - z_o}{c}$$

και εξισώνοντας τους τρεις λόγους προκύπτει

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} \quad (1.1.3)$$

που είναι η εξίσωση της ευθείας σε **αναλυτική-μη παραμετρική** μορφή. **Οι τρεις μορφές είναι ισοδύναμες.**

Εφαρμογή 1.1.1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία $A(1, 2, 3)$ και $B(-1, 3, 2)$. Ανήκει το σημείο $C(2, 2, 2)$ στην ευθεία AB ;

Αν $M(x, y, z)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB , τότε τα διανύσματα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{AM}$ είναι παράλληλα. Άρα, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$\begin{aligned}\mathbf{AM} = \lambda \mathbf{AB} &\Leftrightarrow (x, y, z) - (x_A, y_A, z_A) = \lambda(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-1 - 1, 3 - 2, 2 - 3) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = \underbrace{(1, 2, 3)}_{\text{σημείο από το οποίο περνά η ευθεία}} + \lambda \underbrace{(-2, 1, -1)}_{\text{διάνυσμα στο οποίο είναι παράλληλη η ευθεία}}\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

Η σχέση (1.1.1) που αποτελεί τη διανυσματική-παραμετρική εξίσωση της ευθείας AB γράφεται

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-2, 1, -1) \Leftrightarrow (x, y, z) = (1 - 2\lambda, 2 + \lambda, 3 - \lambda) \Leftrightarrow \{x = 1 - 2\lambda, y = 2 + \lambda, z = 3 - \lambda\} \quad (1.1.2)$$

που είναι η αναλυτική-παραμετρική εξίσωση. Αν λύσουμε ως προς λ τις ισότητες της (1.1.2), παίρνουμε

$$\lambda = \frac{x - 1}{-2}, \quad \lambda = \frac{y - 2}{1}, \quad \lambda = \frac{z - 3}{-1}$$

και εξισώνοντας τους τρεις λόγους προκύπτει η αναλυτική-μη παραμετρική μορφή

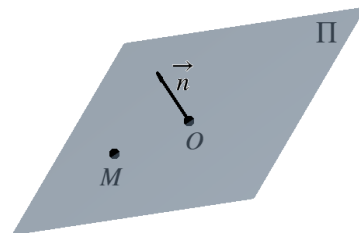
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \quad (1.1.3)$$

Για να ανήκει το σημείο $C(2, 2, 2)$ στην ευθεία, πρέπει να ικανοποιεί την (1.1.1) ή την (1.1.2) ή την (1.1.3). Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του C στην (1.1.3) προκύπτει

$$\frac{2-1}{-2} = \frac{2-2}{1} = \frac{2-3}{-1} \rightarrow \text{άτοπο, άρα το σημείο } C \text{ δεν ανήκει στην ευθεία } AB.$$

1.2 Η εξίσωση επιπέδου

Δίνεται το σημείο $O(x_o, y_o, z_o)$ και το διάνυσμα $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Ζητείται η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο O και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n}$. Δηλαδή, ζητείται η συνθήκη που ικανοποιούν οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου, ώστε αυτό να ανήκει στο επίπεδο αυτό. Έστω $M(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Επειδή το $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο επίπεδο, πρέπει το $\mathbf{n}$ να είναι κάθετο και στο διάνυσμα $\mathbf{OM}$. Άρα,



$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{OM} = 0 &\Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = \underbrace{ax_o + by_o + cz_o}_d \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = d \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Η εξίσωση του επιπέδου είναι η (1.2.1). Οι συντελεστές των x, y, z στην εξίσωση αυτή είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{n}$. Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής (1.2.1) παριστάνει επίπεδο με (ένα) κάθετο διάνυσμα το (a, b, c) .

Παράδειγμα: Η εξίσωση $3x - 2y + 4z = 8$ παριστάνει επίπεδο με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (3, -2, 4)$.

Εφαρμογή 1.2.1. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 1, 1)$. Να εξετασθεί αν τα σημεία αυτά ορίζουν επίπεδο. Αν ναι, να βρεθεί η εξίσωσή του.

Εξετάζουμε αν τα σημεία A, B, C είναι συνευθειακά, αν δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{AC}$ είναι συγγραμμικά. Υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$,

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (-1 - 1, 1 - 2, 2 - 0) \times (2 - 1, 1 - 2, 1 - 0) = (-2, -1, 2) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = (1, 4, 3) \neq \mathbf{0}$$

Άρα, τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά, και συνεπώς τα σημεία A, B, C είναι μη συνευθειακά και ορίζουν επίπεδο· έστω (Π) .

Για να βρούμε την εξίσωση του επιπέδου, αρκεί να βρούμε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Όμως, το διάνυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$. Άρα, το $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο επίπεδο (Π) . Επομένως, ζητάμε την εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο $A(1, 2, 0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n} = (1, 4, 3)$.

Αν $M(x, y, z)$ είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε:

$$\mathbf{AM} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y - 2, z - 0) \cdot (1, 4, 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot 1 + (y - 2) \cdot 4 + z \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow x + 4y + 3z = 9$$

Προφανώς, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε άλλο σημείο ή άλλο συνδυασμό διανυσμάτων για τον υπολογισμό της εξίσωσης του επιπέδου, χωρίς να μεταβάλλεται το αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 1.2.2. Δίνονται τα επίπεδα (Π_1) : $x - 2y + 3z = 1$ και (Π_2) : $2x + 2y - z = 0$. Να εξετασθεί αν τέμνονται. Αν ναι, να βρεθεί η εξίσωση της τομής σε διανυσματική-παραμετρική μορφή.

Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (Π_1) : $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 3)$

Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (Π_2) : $\mathbf{n}_2 = (2, 2, -1)$

Αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, τότε και τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα θα είναι παράλληλα.

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -2, 3) \times (2, 2, -1) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \dots = (-4, 7, 6) \neq \mathbf{0}$$

Τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα, άρα και τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα, δηλαδή τέμνονται. Η τομή τους είναι μια ευθεία (ε). Έστω $M(x, y, z)$ τυχαίο σημείο της ευθείας (ε). Το M θα ανήκει και στα δύο επίπεδα.

$$M \in \Pi_1 \Rightarrow x - 2y + 3z = 1$$

$$M \in \Pi_2 \Rightarrow 2x + 2y - z = 0$$

Θέτω μία από τις συντεταγμένες του M ίση με λ , έστω $z = \lambda$. Επομένως,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1-2\lambda}{3}, \frac{7\lambda-2}{6}, \lambda \right) \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{6}, 0 \right) + \lambda \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1 \right) \quad (1.2.1)$$

Η (1.2.1) είναι η διανυσματική-παραμετρική μορφή της ευθείας (ε), τομής των $(\Pi_1), (\Pi_2)$. Η τομή των επιπέδων περνά από το σημείο $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{6}, 0 \right)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1 \right)$.

Εφαρμογή 1.2.3. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : x - 1 = -y - 1 = \frac{z-1}{2}$, $(\varepsilon_2) : 1 - x = \frac{y+1}{2} = z - 1$. Ναδειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

Διανυσματική-παραμετρική εξίσωση ευθειών

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1) : x - 1 = -y - 1 = \frac{z-1}{2} = \lambda &\Leftrightarrow \left\{ x - 1 = \lambda, -y - 1 = \lambda, \frac{z-1}{2} = \lambda \right\} \Leftrightarrow \{x = 1 + \lambda, y = -1 - \lambda, z = 1 + 2\lambda\} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = \underbrace{(1, -1, 1)}_{A_1} + \lambda \underbrace{(1, -1, 2)}_{\mathbf{n}_1} \quad (1.2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_2) : 1 - x = \frac{y+1}{2} = z - 1 = t &\Leftrightarrow \left\{ 1 - x = t, \frac{y+1}{2} = t, z - 1 = t \right\} \Leftrightarrow \{x = 1 - t, y = -1 + 2t, z = 1 + t\} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = \underbrace{(1, -1, 1)}_{A_2} + t \underbrace{(-1, 2, 1)}_{\mathbf{n}_2} \quad (1.2.2) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $A_1 \equiv A_2$, επομένως το $A(1, -1, 1)$ είναι το σημείο τομής των ευθειών. Αν το σημείο τομής των ευθειών δεν ήταν προφανές, θα θεωρούσαμε σημείο $A_o = (x_o, y_o, z_o)$ τέτοιο, ώστε $A_o \in (\varepsilon_1)$, και $A_o \in (\varepsilon_2)$ και θα λύναμε το σύστημα που προέκυπτε με αγνώστους τα λ_o, t_o .

Αφού υπάρχει σημείο τομής των ευθειών, προφανώς θα τέμνονται και θα ορίζουν ένα επίπεδο (Π) που θα περνά από το σημείο A . Επειδή τα διανύσματα $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ είναι παράλληλα στο επίπεδο, το $\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ θα είναι κάθετο στο επίπεδο.

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -1, 2) \times (-1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = (-5, -3, 1)$$

Το ζητούμενο επίπεδο (Π) περνά από το σημείο $A(1, -1, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{m} = (-5, -3, 1)$. Αν $M(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου (Π), τότε

$$\mathbf{m} \perp \mathbf{AM} \Leftrightarrow \mathbf{m} \cdot \mathbf{AM} = 0 \Leftrightarrow (-5, -3, 1) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -5x - 3y + z = -1$$

Εφαρμογή 1.2.4. Δίνεται το επίπεδο (Π): $x - y + 2z = 4$ και το σημείο $A(2, 1, 3)$.

- i. Ανήκει το A στο (Π);
Να βρεθούν:

- ii . ένα σημείο B του επιπέδου (Π) ,
- iii . η (ορθή) προβολή του A στο (Π) ,
- iv . το συμμετρικό του A ως προς το (Π) ,
- v . η προβολή της ευθείας (AB) στο (Π) ,
- vi . η συμμετρική ευθεία της (AB) ως προς το (Π) ,
- vii . η απόσταση του σημείου A από το (Π) .

i . Ελέγχουμε αν οι συντεταγμένες του A ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου (Π) , δηλαδή

$$x_A - y_A + 2z_A = 4 \Leftrightarrow 2 - 1 + 2 \cdot 3 = 4 \rightarrow \text{άτοπο} \rightarrow A \notin (\Pi)$$

ii . Οι συντεταγμένες του B πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του επιπέδου (Π) , δηλαδή

$$x_B - y_B + 2z_B = 4$$

Αν επιλέξουμε αυθαίρετα τα δύο εκ των x_B, y_B, z_B , π.χ. $x_B = y_B = 0$, τότε βρίσκουμε το τρίτο: $z_B = 2$. Άρα, ένα σημείο του (Π) είναι το $B(0, 0, 2)$.

iii . Έστω $C(x_C, y_C, z_C)$ η ορθή προβολή του σημείου A , δηλαδή το ίχνος της καθέτου από το A προς το (Π) . Τότε,

$$C \in (\Pi) \Leftrightarrow x_C - y_C + 2z_C = 4$$

$$\mathbf{AC} \perp (\Pi) \Leftrightarrow \mathbf{AC} \parallel \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{AC} = \lambda \mathbf{n} \Leftrightarrow (x_C - 2, y_C - 1, z_C - 3) = \lambda(1, -1, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = \lambda \\ y_C - 1 = -\lambda \\ z_C - 3 = 2\lambda \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων, προκύπτει ότι

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad x_C = \frac{3}{2}, \quad y_C = \frac{3}{2}, \quad z_C = 2 \quad \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$$

iv . Αν $D(x_D, y_D, z_D)$ το συμμετρικό του A ως προς το επίπεδο (Π) , τότε

$$\mathbf{AD} = 2\mathbf{AC} \Leftrightarrow (x_D - 2, y_D - 1, z_D - 3) = 2\left(\frac{3}{2} - 2, \frac{3}{2} - 1, 2 - 3\right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow D(1, 2, 1)$$

v . Για να βρούμε την προβολή της ευθείας AB στο επίπεδο (Π) , αρκεί να βρούμε τις προβολές δύο σημείων της στο (Π) . Το σημείο B είναι ήδη σημείο του επιπέδου, και η προβολή του A στο επίπεδο (Π) έχει βρεθεί προηγουμένως και είναι το σημείο C . Άρα, η προβολή της ευθείας AB στο (Π) είναι η ευθεία BC , με $B(0, 0, 2)$ και $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$.

Αν $M(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο της BC , τότε

$$\mathbf{BM} \parallel \mathbf{BC} \Leftrightarrow \mathbf{BM} = t\mathbf{BC} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 2) + t\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

vi . Για να βρούμε τη συμμετρική της ευθείας AB ως προς το επίπεδο (Π) , αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ευθείας. Το συμμετρικό σημείο του A ως προς το (Π) είναι το D , ενώ το συμμετρικό σημείο του B είναι το ίδιο το B . Άρα, η συμμετρική ευθεία της AB ως προς το (Π) είναι η ευθεία BD . Αν $M(x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο της BD , τότε

$$\mathbf{BM} \parallel \mathbf{BD} \Leftrightarrow \mathbf{BM} = s\mathbf{BD} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 2) + s(1, 2, -1)$$

vii . Η απόσταση του σημείου A από το επίπεδο (Π) είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος AC , δηλαδή

$$d = \|\mathbf{AC}\| = \left\| \left(\frac{3}{2} - 2, \frac{3}{2} - 1, 3 - 2 \right) \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$