

2.6 Παραγωγισιμότητα συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμός. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) , αν οι $\partial f / \partial x$ και $\partial f / \partial y$ υπάρχουν στο (x_0, y_0) και

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

Ορισμός. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Το επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$z = f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)$$

λέγεται το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$.

Παράδειγμα: Υπολογίστε το επίπεδο που εφάπτεται στο γράφημα της $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ στο σημείο $(1, 0, 2)$.

Οι μερικές παράγωγοι της $z = f(x, y)$ ως προς x, y είναι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}$$

Στο σημείο $(1, 0, 2)$ είναι ίσες με 2 και 1, αντίστοιχα. Άρα, από το εφαπτόμενο επίπεδο είναι

$$z = 2 + 2(x - 1) + 1(y - 0) \Rightarrow z = 2x + y. \quad \square$$

Ορισμός. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση. Λέμε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbf{x}_0 \in U$, αν οι μερικές παράγωγοι της υπάρχουν στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

όπου $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $\partial f_i / \partial x_j$ υπολογισμένους στο $\mathbf{x}_0$: ο $\mathbf{T}$ καλείται παράγωγος της f στο $\mathbf{x}_0$.

Στην γενική περίπτωση μιας συνάρτησης $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, η παράγωγος είναι ένας πίνακας $m \times n$ που δίνεται από την

$$\mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ο $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ ονομάζεται πίνακας των μερικών παραγώγων της f ή πίνακας Jacobi της f .

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί ο πίνακας Jacobi της συνάρτησης $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$.

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix} \quad \square$$

Εφαρμογή 2.6.1. Δίνεται $\mathbf{F}(u, v) = \begin{bmatrix} u + v \\ uv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^3 \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \\ g_3(x, y) \end{bmatrix}$ και $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$. Να

βρεθούν οι $\frac{\partial h_1}{\partial u}$, $\frac{\partial h_3}{\partial v}$.

Αρχικά,

$$\mathbf{H}(u, v) = (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(u, v) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(u, v)) = \mathbf{G}(u + v, uv) = ((u + v)^2 + u^2v^2, (u + v)^3, u + v + uv) = (h_1(u, v), h_2(u, v), h_3(u, v))$$

Επομένως, $\frac{\partial h_1}{\partial u} = 2(u + v) + 2uv^2$ και $\frac{\partial h_3}{\partial v} = 1 + u$.

Με κανόνα αλυσίδας: Επειδή εδώ έχουμε διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, τα διαφορικά είναι πίνακες Jacobi. Άρα,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \\ \frac{\partial h_3}{\partial u} & \frac{\partial h_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix}_{(u+v, uv)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\text{Επομένως, } \frac{\partial h_1}{\partial u} = \frac{\partial g_1}{\partial x} \Big|_{(u+v, uv)} \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{(u+v, uv)} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 2x \Big|_{(u+v, uv)} + 2y \Big|_{(u+v, uv)} \cdot v = 2(u+v) + 2uv^2$$

Υπενθύμιση: Για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ κατά την κατεύθυνση δοσμένου διανύσματος $\mathbf{n}$, εργαζόμαστε ως εξής:

I . Βρίσκουμε το μέτρο $\|\mathbf{n}\|$ του διανύσματος $\mathbf{n}$, ώστε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$.

II . Βρίσκουμε την κλίση της f , $\text{grad} f = \nabla f$, στο σημείο $\mathbf{x}_0$.

III . Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\mathbf{x}_0}$

Σημείωση: Η παράγωγος κατά κατεύθυνση αναφέρεται και ως ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κατά την κατεύθυνση αυτή.

Εφαρμογή 2.6.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = y^2 z^2 - x^2$ και το σημείο $A(2, -1, 3)$.

i . Να βρεθεί η κατεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο σημείο A γίνεται μέγιστη. Να βρεθεί η μέγιστη αυτή τιμή.

ii . Να βρεθεί η κατεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο σημείο A γίνεται ελάχιστη. Να βρεθεί η ελάχιστη αυτή τιμή.

Μία κατεύθυνση ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα, έστω $\hat{\mathbf{n}}$. Η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο A κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_A &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f \Big|_A = \hat{\mathbf{n}} \cdot (-2x, 2yz^2, 2y^2z) \Big|_{(2, -1, 3)} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (-4, -18, 6) \\ &= \|\hat{\mathbf{n}}\| \|(-4, -18, 6)\| \cos \phi = \sqrt{376} \cos \phi \end{aligned}$$

i . Η παράγωγος κατά κατεύθυνση στο σημείο A γίνεται μέγιστη όταν τα διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}$, $\nabla f \Big|_A$ είναι παράλληλα και ομόρροπα. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f \Big|_A}{\|\nabla f \Big|_A\|} = \frac{1}{\sqrt{376}}(-4, -18, 6)$$

και η μέγιστη τιμή της παραγώγου είναι ίση με $\sqrt{376}$.

ii . Η παράγωγος κατά κατεύθυνση στο σημείο A γίνεται ελάχιστη όταν τα διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}$, $\nabla f \Big|_A$ είναι παράλληλα και αντίρροπα. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση

$$\hat{\mathbf{n}} = -\frac{\nabla f \Big|_A}{\|\nabla f \Big|_A\|} = -\frac{1}{\sqrt{376}}(-4, -18, 6)$$

και η ελάχιστη τιμή της παραγώγου είναι ίση με $-\sqrt{376}$.

2.7 Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Ορισμός. Αν $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση, ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ καλείται

- τοπικό ελάχιστο της f αν υπάρχει περιοχή V του $\mathbf{x}_0$ τέτοια, ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$
- τοπικό μέγιστο της f αν υπάρχει περιοχή V του $\mathbf{x}_0$ τέτοια, ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$

Ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ λέγεται κρίσιμο σημείο της f , αν $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Ένα κρίσιμο σημείο που δεν είναι τοπικό ακρότατο, λέγεται σαγματικό σημείο. Κάθε ακρότατο είναι κρίσιμο σημείο.

Στην γενική περίπτωση μιας συνάρτησης $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ο τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ που δίνεται από την

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται Εσσιανός πίνακας f .

- Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, με $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτησης κλάσεως C^3 και $\mathbf{x}_0$, τότε το σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι κρίσιμο αν και μόνο αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in [1, n]$.
- Αν ο $H_f(\mathbf{x}_0)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- Αν ο $H_f(\mathbf{x}_0)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του αρνητικές, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- Αν ο $H_f(\mathbf{x}_0)$ έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σάγμα.
- Για $U \subseteq \mathbb{R}^2$ μπορούμε να δουλέψουμε και ως εξής:

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{x}_0) & f_{xy}(\mathbf{x}_0) \\ f_{yx}(\mathbf{x}_0) & f_{yy}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \text{ και } \Delta \text{ η ορίζουσά του, δηλαδή } \Delta = f_{xx}(\mathbf{x}_0) \cdot f_{yy}(\mathbf{x}_0) - (f_{xy}(\mathbf{x}_0))^2$$

- Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(\mathbf{x}_0) > 0$, τότε $\mathbf{x}_0$ τοπικό ελάχιστο.
- Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(\mathbf{x}_0) < 0$, τότε $\mathbf{x}_0$ τοπικό μέγιστο.
- Αν $\Delta < 0$, τότε $\mathbf{x}_0$ σάγμα.
- Αν $\Delta = 0$, τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα και συνήθως δουλεύουμε με τον ορισμό ακροτάτου.

Εφαρμογή 2.7.1. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία των

i. $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - xy + y^2)$

ii. $f(x, y) = x^4 + 2y^4 - y^2$

i. Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους,

$$f_x = e^{x+y}(x^2 - xy + y^2 + 2x - y)$$

$$f_y = e^{x+y}(x^2 - xy + y^2 - x + 2y)$$

$$\text{Κρίσιμα σημεία: } \nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow (f_x, f_y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \xrightarrow{e^{x+y} \neq 0} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 + 2x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - x + 2y = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι συμμετρικό ως προς την εναλλαγή $x \leftrightarrow y$, άρα αναζητούμε λύσεις για τις

οποίες ισχύει η σχέση $x = y$. Τότε, έχουμε

$$y^2 - y^2 + y^2 + 2y - y = 0 \Rightarrow y(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 = x_1 \\ y_2 = -1 = x_2 \end{cases}$$

Οπότε, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $O(0, 0)$ και $A(-1, -1)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης.

$$f_{xx} = e^{x+y}(x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 2)$$

$$f_{xy} = e^{x+y}(x^2 - xy + y^2 + x + y - 1) = f_{yx} \rightarrow \text{αφού η } f \text{ είναι } C^2 \text{ ως πράξεις } C^2 \text{ συναρτήσεων}$$

$$f_{yy} = e^{x+y}(x^2 - xy + y^2 + 4y - 2x + 2)$$

- Για το $O(0, 0)$: $\Delta(0, 0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{yx}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

Οπότε το $O(0, 0)$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου, και επειδή $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, το O είναι θέση τοπικού ελαχίστου με $f_{min} = f(0, 0) = 0$.

- Για το $A(-1, -1)$: $\Delta(-1, -1) = \begin{vmatrix} f_{xx}(-1, -1) & f_{xy}(-1, -1) \\ f_{yx}(-1, -1) & f_{yy}(-1, -1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2} & -2e^{-2} \\ -2e^{-2} & e^{-2} \end{vmatrix} = -3e^{-4} < 0$

Οπότε το $A(-1, -1)$ είναι σάγμα.

ii . Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους,

$$f_x = 4x^3$$

$$f_y = 8y^3 - 2y$$

Κρίσιμα σημεία: $\nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow (f_x, f_y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 8y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(4y^2 - 1) = 0 \end{cases}$

Οπότε, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $O(0, 0)$, $A(0, \frac{1}{2})$ και $B(0, -\frac{1}{2})$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης.

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{xy} = 0 = f_{yx}$$

$$f_{yy} = 24y^2 - 2$$

Επομένως, $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 12x^2(24y^2 - 2) = 24x^2(12y^2 - 1)$

- Για το $O(0, 0)$: $\Delta(0, 0) = 0$.

Άρα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό ώστε να βγάλουμε συμπέρασμα. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(\alpha, \beta)$ κοντά στο $O(0, 0)$. Τότε,

$$\delta = f(0, 0) - f(\alpha, \beta) = 0 - (\alpha^4 + 2\beta^4 - \beta^2) \Rightarrow \delta = -\alpha^4 - 2\beta^4 + \beta^2$$

– Αν το M βρίσκεται πάνω στον y -άξονα, δηλαδή έχουμε $\alpha = 0$, τότε $\delta = -2\beta^2(\beta^2 - 1) > 0$ κοντά στο $(0, 0)$.

– Αν το M βρίσκεται πάνω στον x -άξονα, δηλαδή έχουμε $\beta = 0$, τότε $\delta = -\alpha^4 < 0$ κοντά στο $(0, 0)$.

Επομένως, άλλοτε έχουμε $\delta > 0$ και άλλοτε $\delta < 0$, οπότε το $O(0, 0)$ είναι σάγμα.

- Για το $A(0, \frac{1}{2})$: $\Delta(0, \frac{1}{2}) = 0$

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση. Θεωρώντας τυχαίο σημείο $M(\alpha, \beta)$ κοντά στο $A(0, \frac{1}{2})$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\delta = -\alpha^4 - 2\left(\frac{1}{4} - \beta^2\right)^2 < 0, \quad \forall M \neq A$$

Οπότε το $A(0, \frac{1}{2})$ είναι τοπικό ελάχιστο.

- Για το $B(0, -\frac{1}{2})$: $\Delta(0, -\frac{1}{2}) = 0$ Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση. Θεωρώντας τυχαίο σημείο $M(\alpha, \beta)$ κοντά στο $B(0, -\frac{1}{2})$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\delta = -\alpha^4 - 2\left(\frac{1}{4} - \beta^2\right)^2 < 0, \quad \forall M \neq B$$

Οπότε το $B(0, -\frac{1}{2})$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Εφαρμογή 2.7.2. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + z^2$.

Η συνάρτηση f είναι C^∞ ως πολυωνυμική.

$$\text{Κρίσιμα σημεία: } \nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 9 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm \sqrt{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow A(1, \sqrt{3}, 0), B(1, -\sqrt{3}, 0), C(-1, \sqrt{3}, 0), D(-1, -\sqrt{3}, 0)$$

Είμαστε στον $\mathbb{R}^3$, άρα δουλεύουμε με τον Εσσιανό πίνακα

$$H_f(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{bmatrix} 6x_0 & 0 & 0 \\ 0 & -6y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι διαγώνιος, επομένως οι ιδιοτιμές του είναι οι $6x_0, -6y_0, 2$.

- Για το $A(1, \sqrt{3}, 0)$: ιδιοτιμές $6, -6\sqrt{3}, 2$, σάγμα
- Για το $B(1, -\sqrt{3}, 0)$: ιδιοτιμές $6, 6\sqrt{3}, 2$, τοπικό ελάχιστο
- Για το $C(-1, \sqrt{3}, 0)$: ιδιοτιμές $-6, -6\sqrt{3}, 2$, σάγμα
- Για το $D(-1, -\sqrt{3}, 0)$: ιδιοτιμές $-6, 6\sqrt{3}, 2$, σάγμα