

2.4 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $f(x, y)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε, οι μερικές παράγωγοι της f ως προς x και y συμβολίζονται ως

$$\text{Μερική παράγωγος ως προς } x : f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{Μερική παράγωγος ως προς } y : f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{Μερική παράγωγος } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης ως προς } x : f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\text{Μερική παράγωγος } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης ως προς } y : f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\text{Μικτή παράγωγος } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης : } f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις ισχύει $f_{xy} = f_{yx} \rightarrow$ ανεξαρτησία από τη σειρά παραγώγισης

Εφαρμογή 2.4.1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ επαληθεύει την εξίσωση:

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

Βρίσκουμε αρχικά τις ζητούμενες μερικές παραγώγους:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial x}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + x \frac{\partial}{\partial x} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + x \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + x \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 y + y^3 - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$f_y = \frac{\partial x}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + x \frac{\partial}{\partial y} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] = x \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x}\right) = x \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = -\frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x(x^2 + y^2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Επομένως,

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = x^2 \left[-\frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] + 2xy \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + y^2 \left[-\frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \frac{-2x^2 y^3 + 4x^2 y^3 - 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Το πολυώνυμο Taylor

Έστω $f(x, y)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Σε ένα οποιοδήποτε σημείο (α, β) του πεδίου ορισμού της, ορίζεται το πολυώνυμο Taylor

(I) 1^{ου} βαθμού

$$P_1(x, y) = f(\alpha, \beta) + f_x(\alpha, \beta)(x - \alpha) + f_y(\alpha, \beta)(y - \beta)$$

(II) 2^{ου} βαθμού

$$P_2(x, y) = f(\alpha, \beta) + f_x(\alpha, \beta)(x - \alpha) + f_y(\alpha, \beta)(y - \beta) + \frac{1}{2} [f_{xx}(\alpha, \beta)(x - \alpha)^2 + f_{yy}(\alpha, \beta)(y - \beta)^2 + 2f_{xy}(\alpha, \beta)(x - \alpha)(y - \beta)]$$

Ειδικά για $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, το πολυώνυμο ονομάζεται πολυώνυμο MacLaurin. Σε σημείο $M(x, y)$ το οποίο βρίσκεται κοντά στο σημείο $K(\alpha, \beta)$, η f προσεγγίζεται με ανάπτυγμα Taylor στο σημείο (α, β) . Επομένως, $f(x, y) \approx P_1(x, y)$, δηλαδή το πολυώνυμο Taylor 1^{ου} βαθμού αποτελεί τη γραμμική προσέγγιση της f .

Εφαρμογή 2.4.2. Να προσεγγισθεί η συνάρτηση $f(x, y) = e^y \sin x$ με το πολυώνυμο MacLaurin 2^{ου} βαθμού.

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{yy}(0, 0)y^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy] = x + xy$$

Διότι,

$$f(0, 0) = e^y \sin x \Big|_{(0,0)} = e^0 \sin 0 = 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = -e^y \sin x \Big|_{(0,0)} = -e^0 \sin 0 = 0$$

$$f_x(0, 0) = e^y \cos x \Big|_{(0,0)} = e^0 \cos 0 = 1$$

$$f_{yy}(0, 0) = e^y \sin x \Big|_{(0,0)} = e^0 \sin 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = e^y \sin x \Big|_{(0,0)} = e^0 \sin 0 = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = e^y \cos x \Big|_{(0,0)} = e^0 \cos 0 = 1$$

Εφαρμογή 2.4.3. Χρησιμοποιώντας γραμμική προσέγγιση, να βρεθεί προσεγγιστική τιμή της ποσότητας $\sqrt{3.04^2 + 3.98^2}$.

Έστω $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο $(\alpha, \beta) = (3, 4)$.

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(3, 4) + f_x(3, 4)(x - 3) + f_y(3, 4)(y - 4) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(3,4)} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4)} (x - 3) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4)} (y - 4) \\ &= 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } P_1(3.04, 3.98) = 5 + \frac{3}{5}(3.04 - 3) + \frac{4}{5}(3.98 - 4) = 5.008$$

Οι διαφορικοί τελεστές στον $\mathbb{R}^3$

(I) **Κλίση** $\longrightarrow$ εφαρμόζεται σε βαθμωτή συνάρτηση και δίνει διανυσματική συνάρτηση

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \text{όπου } f = f(x, y, z)$$

(II) **Απόκλιση** $\longrightarrow$ εφαρμόζεται σε διανυσματική συνάρτηση και δίνει βαθμωτή συνάρτηση

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{όπου } \mathbf{F} = \mathbf{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

(III) **Περιστροφή / Στροβιλισμός** $\rightarrow$ εφαρμόζεται σε διανυσματική συνάρτηση και δίνει διανυσματική συνάρτηση

$$\text{rot}\mathbf{F} = \text{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

όπου $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

* **Ανάδελτα:** $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Εφαρμογή 2.4.4. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2, x^2 - 2yz, -y^2 + 2xz)$$

Απόκλιση: $\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2 + 2xz) = 2y - 2z + 2x$

Στροβιλισμός: $\text{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z^2 & x^2 - 2yz & -y^2 + 2xz \end{vmatrix} = \dots = 0 \rightarrow$ **αστρόβιλο** διανυσματικό πεδίο

2.5 Μερική Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $z = f(x, y)$ δύο μεταβλητών· για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών η διαδικασία είναι παρόμοια. Ο ήδη γνωστός τύπος του κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής $y = f(x)$, όπου $x = x(t)$, γράφεται ως

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Παράδειγμα: Να βρείτε την παράγωγο της y ως προς t , αν $y(t) = (t^2 + 3)^4 e^{2(t^2+3)}$.

Η y μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση συναρτήσεων, δηλαδή ως

$$y(x) = x^4 e^{2x}, \quad \text{όπου} \quad x(t) = t^2 + 3$$

Επομένως, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 2x^3(2+x)e^{2x} \cdot 4t = 2(t^2+3)^3(t^2+5)e^{2(t^2+3)} \square$

Στην περίπτωση όπου $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$, η f είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών u, v , άρα

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) \equiv g(u, v)$$

ενώ από τον **κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης** οι μερικές παράγωγοι της f ως προς u, v δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

δηλαδή, από το άθροισμα όλων των αλυσίδων που ξεκινούν από την f και καταλήγουν στην αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή.

Εφαρμογή 2.5.1. Δίνεται η συνάρτηση $z = f(u)$. Αν $u = u(x, y)$, να βρεθούν οι εκφράσεις των f_x, f_y συναρτήσει της $f'(u)$ και των u_x, u_y .

$$f_x = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)u_x \quad \text{και} \quad f_y = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)u_y$$

Εφαρμογή 2.5.2. Αν $f = f(x, y)$ και $x = u + v, y = u - v$, να βρεθούν οι εκφράσεις των f_x, f_y, f_{xy} συναρτήσει των παραγώγων της f ως προς u και v .

Βρίσκουμε αρχικά τις εκφράσεις των u, v συναρτήσει των x, y : $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}(x + y) \\ v = \frac{1}{2}(x - y) \end{cases}$

- $f_x = f_u u_x + f_v v_x = \frac{1}{2}f_u + \frac{1}{2}f_v$
- $f_y = f_u u_y + f_v v_y = \frac{1}{2}f_u - \frac{1}{2}f_v$
- $f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2}f_u + \frac{1}{2}f_v \right) = \frac{1}{2}f_{uu}u_y + \frac{1}{2}f_{uv}v_y + \frac{1}{2}f_{vu}u_y + \frac{1}{2}f_{vv}v_y = \frac{1}{4}f_{uu} - \cancel{\frac{1}{4}f_{uv}} + \cancel{\frac{1}{4}f_{vu}} - \frac{1}{4}f_{vv} = \frac{1}{4}f_{uu} - \frac{1}{4}f_{vv}$

Εφαρμογή 2.5.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y)$, με $x = x(u, v) = e^u \cos v$ και $y = y(u, v) = e^u \sin v$. Να δείξετε ότι

$$\text{i. } f_x^2 + f_y^2 = e^{-2u} (f_u^2 + f_v^2) \quad \text{ii. } f_{xx} + f_{yy} = e^{-2u} (f_{uu} + f_{vv})$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους που θα μας χρειαστούν:

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u$$

$$f_v = f_x x_v + f_y y_v$$

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x$$

$$f_y = f_u u_y + f_v v_y$$

$$f_{uu} = \frac{\partial f_u}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (f_x x_u + f_y y_u) = \frac{\partial f_x}{\partial u} x_u + f_x x_{uu} + \frac{\partial f_y}{\partial u} y_u + f_y y_{uu} = (f_{xx} x_u + f_{xy} y_u) x_u + f_x x_{uu} + (f_{yx} x_u + f_{yy} y_u) y_u + f_y y_{uu}$$

$$\stackrel{f_{xy}=f_{yx}}{=} f_{xx} x_u^2 + 2f_{xy} x_u y_u + f_{yy} y_u^2 + f_x x_{uu} + f_y y_{uu}$$

$$f_{vv} = \frac{\partial f_v}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (f_x x_v + f_y y_v) = \frac{\partial f_x}{\partial v} x_v + f_x x_{vv} + \frac{\partial f_y}{\partial v} y_v + f_y y_{vv} = (f_{xx} x_v + f_{xy} y_v) x_v + f_x x_{vv} + (f_{yx} x_v + f_{yy} y_v) y_v + f_y y_{vv}$$

$$\stackrel{f_{xy}=f_{yx}}{=} f_{xx} x_v^2 + 2f_{xy} x_v y_v + f_{yy} y_v^2 + f_x x_{vv} + f_y y_{vv}$$

Επιπλέον,

- $x_u = e^u \cos v$
- $y_u = e^u \sin v$
- $x_{uu} = e^u \cos v = x_u$
- $y_{uu} = e^u \sin v = y_u$
- $x_v = -e^u \sin v$
- $y_v = e^u \cos v$
- $x_{vv} = -e^u \cos v = -x_u$
- $y_{vv} = -e^u \sin v = -y_u$

$$\text{i. } f_u^2 + f_v^2 = (f_x x_u + f_y y_u)^2 + (f_x x_v + f_y y_v)^2 = f_x^2 (x_u^2 + x_v^2) + f_y^2 (y_u^2 + y_v^2) + 2f_x f_y \underbrace{(x_u y_u + x_v y_v)}_{\rightarrow 0}$$

$$= f_x^2 e^{2u} + f_y^2 e^{2u}$$

$$= e^{2u} (f_x^2 + f_y^2) \quad \Rightarrow \quad f_x^2 + f_y^2 = e^{-2u} (f_u^2 + f_v^2)$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } f_{uu} + f_{vv} &= f_{xx}x_u^2 + 2f_{xy}x_ux_u + f_{yy}y_u^2 + f_{xx}x_v^2 + 2f_{xy}x_vy_v + f_{yy}y_v^2 + f_{xx}x_{vv} + f_{yy}y_{vv} \\
&= f_{xx}(x_u^2 + x_v^2) + f_{yy}(y_u^2 + y_v^2) + \cancel{2f_{xy}(x_uy_u + x_vy_v)} \xrightarrow{0} + \cancel{f_{xx}(x_{uu} + x_{vv})} \xrightarrow{0} + \cancel{f_{yy}(y_{uu} + y_{vv})} \xrightarrow{0} \\
&= e^{2u}(f_{xx} + f_{yy}) \implies f_{xx} + f_{yy} = e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv})
\end{aligned}$$