

3. Ολοκληρώματα

3.1 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό σύνολο και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Θεωρούμε μια C^1 καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ τέτοια, ώστε $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, και τη σύνθετη συνάρτηση $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους** της βαθμωτής συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης γ ορίζεται ως

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Παρατηρήσεις

- i . Για να ορισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής (πραγματικής) συνάρτησης $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ κατά μήκος της καμπύλης γ , αρκεί η συνάρτηση $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση (π.χ. να είναι φραγμένη και να έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών).
- ii . Το μήκος της καμπύλης γ υπολογίζεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Ορισμός. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό σύνολο, $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ συνεχής συνάρτηση (διανυσματικό πεδίο) και $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$, κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Θεωρούμε την απεικόνιση $t : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \in \mathbb{R}$, όπου με $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ εννοούμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{F}(\gamma(t))$ και $\gamma'(t)$ του $\mathbb{R}^3$. Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους** της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}$ κατά μήκος της καμπύλης γ ορίζεται ως

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

Παρατήρηση: Άλλος ένας συμβολισμός για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους είναι ο εξής,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz, \quad \text{όπου } \mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Εφαρμογή 3.1.1. Να βρεθούν τα μήκη των καμπυλών:

i . $\gamma(t) = (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 2\pi]$

ii . γ που είναι η τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = \frac{1}{5}x^2 + y^2$ και του επιπέδου $z = 3 - 2y$.

i . Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\alpha \sin t)^2 + (\alpha \cos t)^2 + \beta^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \, dt = 2\pi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

ii . Πρώτα πρέπει να βρούμε τη γ . Η προβολή της καμπύλης στο xy -επίπεδο έχει εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x^2 + y^2 = 3 - 2y \Leftrightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Η έκφραση αυτή αντιστοιχεί σε έλλειψη, η οποία επιδέχεται παραμέτρηση της μορφής:

$$x(t) = \sqrt{20} \cos t = 2\sqrt{5} \cos t$$

$$y(t) = -1 + 2 \sin t, \quad \text{όπου } 0 \leq t < 2\pi$$

Επομένως,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y(t), 3 - 2y(t)) = (2\sqrt{5} \cos t, -1 + 2 \sin t, 5 - 4 \sin t)$$

Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{20 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 16 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{20 \sin^2 t + 20 \cos^2 t} dt = 4\sqrt{5}\pi \end{aligned}$$

Εφαρμογή 3.1.2. Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

i. $\int_{\gamma} (2x + 3yz) ds$ κατά μήκος της καμπύλης με παραμετρηση $\gamma(t) = (t, 2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t < \pi$

ii. $\int_{\gamma} (2xy + 3yz) ds$ όπου γ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(1, 0, 0)$ και $B(2, -2, 2)$

iii. $\int_{\gamma} x ds$ όπου γ το τόξο κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, $x > 0$, $y > 0$

i. $\gamma(t) = (t, 2 \cos t, 2 \sin t) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, -2 \sin t, 2 \cos t)$ και $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + (-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = \sqrt{5}$

$$\int_{\gamma} (2x + 3yz) ds = \int_0^{\pi} (2t + 12 \sin t \cos t) \|\gamma'(t)\| dt = 2\sqrt{5} \int_0^{\pi} (t + 6 \sin t \cos t) dt = \sqrt{5}\pi^2$$

ii. Μία παραμέτρηση του ευθύγραμμου τμήματος AB δίνεται ως εξής: αν $M(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB, έχουμε

$$AB \parallel AM \Rightarrow AM = tAB \Rightarrow (x - 1, y - 0, z - 0) = t(2 - 1, -2 - 0, 2 - 0) \Rightarrow (x - 1, y, z) = (t, -2t, 2t)$$

Επομένως, $\gamma(t) = (t, -2t, 2t) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, -2, 2)$ και $\|\gamma'(t)\| = 3$

Για τα σημεία A, B έχουμε: $z_A = 2t_A \Rightarrow t_A = 0$ και $z_B = 2t_B \Rightarrow t_B = 1$. Άρα,

$$\int_{\gamma} (2xy + 3yz) ds = \int_0^1 (2(1+t)(-2t) + 3(-2t)2t) \|\gamma'(t)\| dt = -12 \int_0^1 (t + 4t^2) dt = -22$$

Παρατήρηση: Ένας άλλος τρόπος παραμέτρησης του ευθύγραμμου τμήματος είναι $\gamma(t) = A + t(B - A)$.

iii. Εδώ, η καμπύλη είναι κύκλος κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας 2. Μία παραμέτρησή του είναι η εξής:

$$x(t) = 2 \cos t$$

$$y(t) = 2 \sin t, \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{αφού } x, y > 0$$

Οπότε, $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \Rightarrow \gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ και $\|\gamma'(t)\| = 2$. Άρα,

$$\int_{\gamma} x ds = \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \cdot 2 dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 4$$

Εφαρμογή 3.1.3. Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

i. $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, όπου $\mathbf{F} = (\sin x, x + y, e^z)$ και $\gamma(t) = (t, t^2, \ln t)$, με $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

ii. $I = \int_{\gamma} x^2 dx - yz dy + xy dz$ κατά μήκος της διαδρομής $\gamma: \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$

i. $\gamma(t) = (t, t^2, \ln t) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, 2t, 1/t)$

$$I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, t + t^2, e^{\ln t}) \cdot (1, 2t, 1/t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin t + 2t^2 + 2t^3 + 1) dt$$

$$= \frac{16\pi^3}{3} + 16\pi^4 + 2\pi$$

ii . Από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t & dx &= -\sin t dt \\ y(t) &= \sin t & dy &= \cos t dt \\ z(t) &= 1 - \cos t - \sin t & dz &= (\sin t - \cos t) dt \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$I = \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (-\sin t) dt - \sin t (1 - \sin t - \cos t) \cos t dt + \cos t \sin t (\sin t - \cos t) dt]$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t - \cos t + 2 \sin^2 t \cos t - \sin t \cos^2 t) dt = 0$$

Εφαρμογή 3.1.4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i . $\oint_C (2y + 3)dx - (x + 2)dy$, όπου C η περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 3$ με ωρολογιακή φορά διαγραφής

ii . $\oint_{\gamma} (y + 3)dx - (x + 2)dy$, όπου γ η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ προσανατολισμένη αντιωρολογιακά

i . C : κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $\sqrt{3}$, άρα η παραμετρική μορφή της είναι $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t)$, όπου $2\pi \rightarrow t \rightarrow 0$. Επιπλέον, $dx = -\sqrt{3} \sin t dt$ και $dy = \sqrt{3} \cos t dt$. Άρα,

$$\begin{aligned} \oint_C (2y + 3)dx - (x + 2)dy &= \int_{2\pi}^0 (2\sqrt{3} \sin t + 3)(-\sqrt{3} \sin t) dt - (\sqrt{3} \cos t + 2)(\sqrt{3} \cos t) dt \\ &= \int_{2\pi}^0 (-6 \sin^2 t - 3\sqrt{3} \sin t - 3 \cos^2 t - 2\sqrt{3} \cos t) dt = 9\pi \end{aligned}$$

ii . Εδώ, η καμπύλη γ είναι κύκλος κέντρου $(1, 2)$ και ακτίνας $\sqrt{5}$, αφού

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{5})^2$$

Επομένως, $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (1 + \sqrt{5} \cos t, 2 + \sqrt{5} \sin t)$, όπου $0 \rightarrow t \rightarrow 2\pi$. Επιπλέον, $dx = -\sqrt{5} \sin t dt$ και $dy = \sqrt{5} \cos t dt$. Άρα,

$$\oint_{\gamma} (y + 3)dx - (x + 2)dy = \int_0^{2\pi} (2 + \sqrt{5} \sin t + 3)(-\sqrt{5} \sin t) dt - (1 + \sqrt{5} \cos t + 2)(\sqrt{5} \cos t) dt = -10\pi$$

Εφαρμογή 3.1.5. Να υπολογισθεί το $W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma : \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$, όπου $\mathbf{F}(x, y) = (y - x^2, x + y^2)$.

Υπενθύμιση θεωρήματος

Εάν $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} \in C^2$, με $\mathbf{F} = \nabla f$ και Γ καμπύλη με παραμέτρηση $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$, C^1 , τότε

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha))$$

Δηλαδή, αν η καμπύλη Γ είναι κλειστή, τότε $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

Εδώ, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, επομένως αναζητούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\mathbf{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. Άρα, πρέπει:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - x^2 \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω ως προς } x} f(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} + c_1(y), & \text{όπου } c_1(y) \text{ αυθαίρετη συνάρτηση του } y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + y^2 \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω ως προς } y} f(x, y) = xy + \frac{y^3}{3} + c_2(x), & \text{όπου } c_2(x) \text{ αυθαίρετη συνάρτηση του } x \end{cases}$$

Επομένως, $f(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} + c_1(y) = xy + \frac{y^3}{3} + c_2(x) \Rightarrow f(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$

Εδώ, όντως $\mathbf{F} = \nabla f$ και η Γ είναι έλλειψη, συνεπώς κλειστή καμπύλη. Οπότε, από γνωστό θεώρημα $W = 0$.

Εφαρμογή 3.1.6. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ με $\mathbf{F}(x, y, z) = y\hat{\mathbf{i}} + (x + e^z)\hat{\mathbf{j}} + ye^z\hat{\mathbf{k}}$ και $\Gamma : \gamma(t) = \left(t, \arctan(t), \sin\left(t^3 + \frac{\pi}{2}\right) \right), \quad t \in [0, 1]$.

Όπως πριν βρίσκουμε f τέτοια, ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$, άρα

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω ως προς } x} f(x, y, z) = xy + h_1(y, z), & \text{όπου } h_1 \text{ αυθαίρετη συνάρτηση} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + e^z \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω ως προς } y} f(x, y, z) = xy + ye^z + h_2(x, z), & \text{όπου } h_2 \text{ αυθαίρετη συνάρτηση} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = ye^z \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω ως προς } z} f(x, y, z) = ye^z + h_3(x, y), & \text{όπου } h_3 \text{ αυθαίρετη συνάρτηση} \end{cases}$$

Επομένως, $f(x, y, z) = xy + ye^z$. Από γνωστό θεώρημα, $W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \frac{\pi}{4} \left(1 + e^{\sin\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)} \right)$

3.2 Διπλά Ολοκληρώματα

Έστω $F(x, y)$ ορισμένη σε κλειστό χωρίο R του xy -επιπέδου. Χωρίζουμε το R σε n υποχωρία ΔR_k επιφάνειας $\Delta A_k, k = 1, 2, \dots, n$. Έστω (ξ_k, η_k) σημείο του ΔR_k . Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta A_k, \quad \text{τότε είναι ίσο με} \quad \iint_R F(x, y) dA.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό υπάρχει αν η $F(x, y)$ είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής στο χωρίο R .

Αν το R είναι τέτοιο, ώστε κάθε παράλληλη στον y ευθεία να τέμνει το σύνορο του R σε δύο σημεία το πολύ, τότε μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις των καμπυλών

- $AB\Gamma$ ως $y = f_1(x)$
- $A\Delta B$ ως $y = f_2(x)$, με $\alpha \leq x \leq \beta$

Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_{x=\alpha}^{\beta} \underbrace{\left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy \right\}}_{\text{υπολογίζω θεωρώντας } x = \text{σταθ.}} dx \quad (3.2.1)$$

Ομοίως, αν κάθε παράλληλη στον x ευθεία να τέμνει το σύνορο του R σε δύο σημεία το πολύ, τότε μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις των καμπυλών

- $\Gamma A \Delta$ ως $x = g_1(y)$
- $\Gamma B \Delta$ ως $x = g_2(y)$, με $\gamma \leq y \leq \delta$

Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_{y=\gamma}^{\delta} \underbrace{\left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx \right\}}_{\text{υπολογίζω θεωρώντας } y = \text{σταθ.}} dy \quad (3.2.2)$$

Αν το ολοκλήρωμα υπάρχει, τότε (3.2.1)=(3.2.2).

Εφαρμογή 3.2.1.

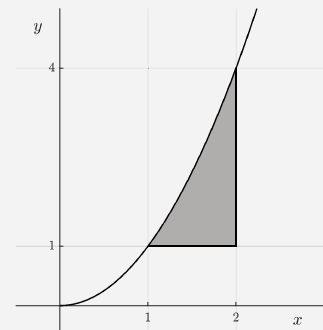
i . Σχεδιάστε το χωρίο R στο xy επίπεδο με σύνορα $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.

ii . Δώστε μια φυσική ερμηνεία του $I = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$.

iii . Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

Το I μπορεί να εκφράζει τη μάζα του χωρίου R με μεταβλητή πυκνότητα $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ ή την πολική ροπή αδράνειας – ροπή αδράνειας του R ως προς την αρχή των αξόνων.

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{x=1}^2 \int_{y=1}^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_{x=1}^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=1}^{x^2} dx \\ &= \int_{x=1}^2 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} \right) \Big|_{x=1}^2 = \frac{1006}{105} \end{aligned}$$

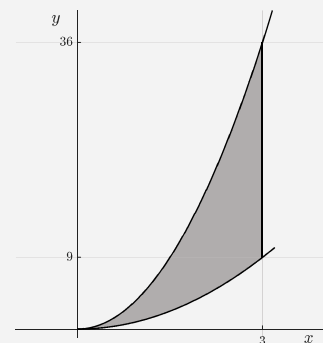


Εναλλακτικά,

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_{y=1}^4 \int_{x=\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dy dx = \frac{1006}{105}.$$

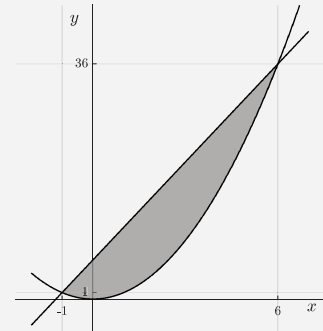
Εφαρμογή 3.2.2. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_A xy dx dy$, όπου A το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $\{y = x^2, y = 4x^2, x = 3\}$.

$$\begin{aligned} \iint_A xy dx dy &= \int_0^3 \int_{x^2}^{4x^2} xy dy dx = \int_0^3 \frac{xy^2}{2} \Big|_{x^2}^{4x^2} dx \\ &= \int_0^3 \frac{15x^5}{2} dx = \frac{15}{12} x^6 \Big|_0^3 = 911.25 \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3.2.3. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = yx^2$ στο χωρίο A που ορίζεται από τις ανισότητες $\{y \leq 5x + 6, y \geq x^2\}$.

$$\begin{aligned}
 \iint_A yx^2 dx dy &= \int_{-1}^6 \int_{x^2}^{5x+6} yx^2 dy dx = \int_{-1}^6 \frac{(xy)^2}{2} \Big|_{x^2}^{5x+6} dx \\
 &= \int_{-1}^6 \left(-\frac{1}{2}x^6 + \frac{25}{2}x^4 + 30x^3 + 18x^2 \right) dx \\
 &= -\frac{1}{14}x^7 + \frac{5}{2}x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 6x^3 \Big|_{-1}^6 \\
 &= \dots = 10476.57
 \end{aligned}$$



3.3 Αλλαγή μεταβλητής στα διπλά ολοκληρώματα

Βήμα 1: Επιλογή συναρτήσεων μετασχηματισμού

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$$

Βήμα 2: Υπολογισμός των ποσοτήτων

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \quad \text{και} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Βήμα 3: Σχεδίαση των εικόνων των συνόρων του χωρίου R στο uv -επίπεδο, οπότε προκύπτει το χωρίο D .

Βήμα 4: Εφαρμογή της σχέσης

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Συνήθεις μετασχηματισμοί

- κυκλικός δίσκος: $x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$
- ελλειπτικός δίσκος: $x = \alpha r \cos \phi, \quad y = \alpha r \sin \phi$

Εφαρμογή 3.3.1. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\cos(x^2 + y^2)$ στο χωρίο R που ορίζεται από τις σχέσεις $\{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq \alpha^2\}$.

Μετασχηματισμός: $x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$

$$\cos(x^2 + y^2) = \cos r^2$$

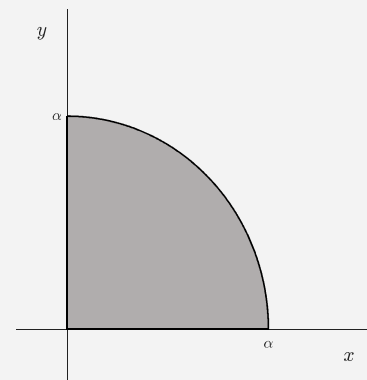
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial r} = r$$

Βρίσκουμε την εικόνα D του χωρίου R στο $r\phi$ -επίπεδο. Επειδή $r \geq 0$, ένα σύνορο είναι ο άξονας ϕ ($r = 0$).

$$x = 0 \Rightarrow r \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow r \sin \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \Rightarrow r = \alpha$$



Επομένως, στο $r\phi$ -επίπεδο, το χωρίο D είναι ορθογώνιο. Άρα,

$$\begin{aligned}\iint_R \cos(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_D \cos r^2 \cdot r dr d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^\alpha r \cos r^2 dr d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{\sin r^2}{2} \right|_0^\alpha d\phi \\ &= \frac{\sin \alpha^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{4} \sin \alpha^2\end{aligned}$$



Εφαρμογή 3.3.2. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$, όπου R είναι το χωρίο με σύνορο: $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Να δοθεί φυσική ερμηνεία του ολοκληρώματος.

Αρχικά, $x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2^2$, δηλαδή το σύνορο του R είναι κύκλος με κέντρο το $K(2, 0)$ και ακτίνα 2.

Μετασχηματισμός: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$

$$\cos(x^2 + y^2) = \cos r^2$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial r} = r$$

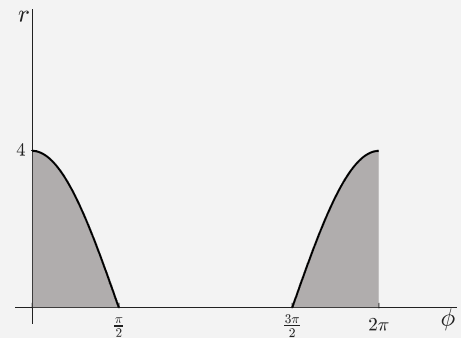
Βρίσκουμε την εικόνα D του χωρίου R στο $r\phi$ -επίπεδο. Η εξίσωση του συνόρου είναι

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow r^2 - 4r \cos \phi = 0 \Rightarrow r = 4 \cos \phi$$

Επειδή $r > 0$, η εξίσωση έχει νόημα μόνο για

$$0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \phi < 2\pi$$

Το χωρίο D φαίνεται στο σχήμα.



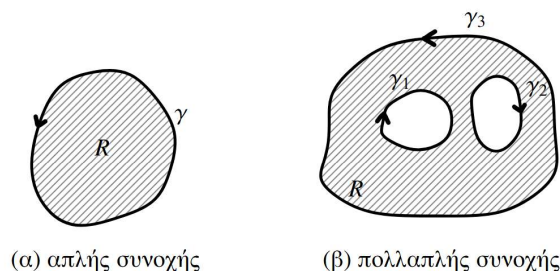
$$\begin{aligned}\iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_D r^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dr d\phi = \iint_D r^3 dr d\phi = \iint_{D_1} r^3 dr d\phi + \iint_{D_2} r^3 dr d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \phi} r^3 dr d\phi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^{4 \cos \phi} r^3 dr d\phi = \dots = 48\pi\end{aligned}$$

Ερμηνείες:

- Η $x^2 + y^2$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας του χωρίου R . Το ολοκλήρωμα είναι η μάζα του χωρίου.
- Η $z = x^2 + y^2$ είναι μια επιφάνεια. Το ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο μεταξύ του χωρίου R και του τμήματος της επιφάνειας που προβάλλεται στον R .
- Αν το R έχει επιφανειακή πυκνότητα $\delta(x, y) = 1$, τότε το ολοκλήρωμα παριστάνει την πολική ροπή αδράνειας του R ως προς την αρχή των αξόνων.

3.4 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και διπλού ολοκληρώματος

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη γ , που είναι το σύνορο του επίπεδου χωρίου R . Η γ καλείται θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, όταν, κινούμενοι πάνω στην καμπύλη, αφήνουμε το χωρίο στα αριστερά.



(α) απλής συνοχής

(β) πολλαπλής συνοχής

Θεώρημα Green στο επίπεδο

Υποθέτουμε ότι το χωρίο απλής συνοχής R έχει σύνορο τη θετικά προσανατολισμένη καμπύλη γ . Αν οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι συνεχείς πάνω στο σύνορο γ ($= \partial R$), ενώ οι μερικές παράγωγοι $\partial P/\partial y$ και $\partial Q/\partial x$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R , τότε ισχύει

$$\oint_{\gamma} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Το θεώρημα ισχύει και για χωρίο R πολλαπλής συνοχής.

Εφαρμογή 3.4.1. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C [(x^2 - y)dx + (x + y^2)dy],$$

όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου OAB με κορυφές $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ και $B(1, 1)$, θετικά προσανατολισμένη.

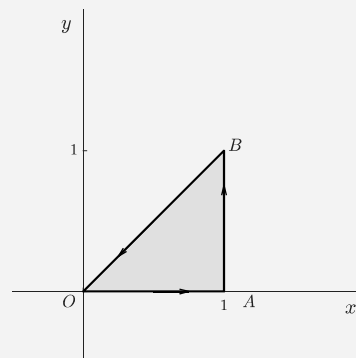
Εδώ είναι:

$$P(x, y) = x^2 - y \quad \partial P/\partial y = -1$$

$$Q(x, y) = x + y^2 \quad \partial Q/\partial x = 1$$

και είναι συνεχείς σε όλο το επίπεδο. Ισχύει το Θεώρημα Green

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R 2dxdy = \int_0^1 \int_0^x 2dydx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3.4.2.

i. Να δειχθεί ότι ο τύπος Green γράφεται

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{\hat{z}} dxdy$$

ii. Να δειχθεί ότι το εμβαδό ενός επιπέδου τόπου R δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα: $E = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, όπου όμως η $\mathbf{F}$ έχει $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{\hat{z}} = 1$.

i . Έστω $\mathbf{F} = (P, Q)$ και $d\ell = (dx, dy)$. Άρα,

$$\mathbf{F} \cdot d\ell = Pdx + Qdy \Rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\ell = \oint_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] \quad (3.4.1)$$

Γενικά,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Όμως $R = 0$ και δεν υπάρχει μεταβλητή z . Επομένως,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{z} \Rightarrow (\text{rot } \mathbf{F}) \hat{z} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \hat{z} dxdy \quad (3.4.2)$$

Από τους τύπους (3.4.1)-(3.4.2), ο τύπος Green γράφεται ως

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\ell = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \hat{z} dxdy \quad (3.4.3)$$

ii . Αν $(\text{rot } \mathbf{F}) \hat{z} = 1$, δηλαδή $Q_x - P_y = 1$, η (3.4.3) γράφεται ως

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\ell = \iint_R dxdy$$

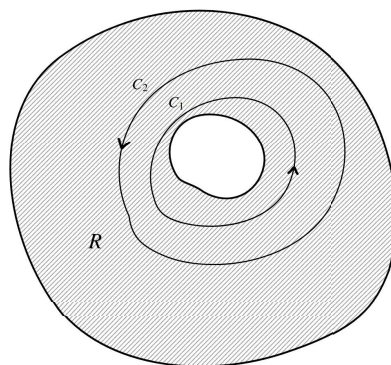
Όμως, το δεύτερο μέλος ισούται με το εμβαδόν του χωρίου R . Άρα,

$$E = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\ell = \oint_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy], \quad \text{αν } Q_x - P_y = 1.$$

Παρατήρηση: Αν $Q_x = P_y$, τότε $\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_R (Q_x - P_y) dxdy = 0$

Αν C_1, C_2 είναι κλειστές καμπύλες, καθεμία από τις οποίες δεν έχει κοινά σημεία με τον εαυτό της, και περικλείουν την οπή (με την ίδια φορά), τότε

$$\oint_{C_1} (Pdx + Qdy) = \oint_{C_2} (Pdx + Qdy)$$



Εφαρμογή 3.4.3. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη $ACBDA$ περικλείει οπή. Αν οι συναρτήσεις P, Q είναι συνεχείς πάνω στην καμπύλη $ACBDA$, ενώ οι Q_x, P_y είναι συνεχείς στον τόπο R και ισχύει $Q_x = P_y$, τότε:

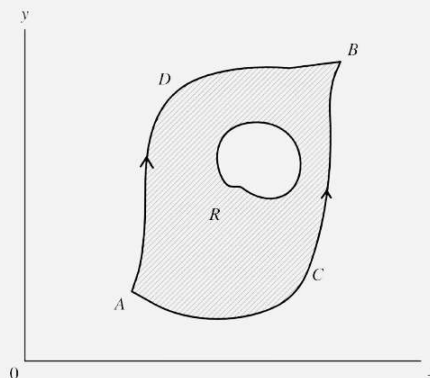
$$\int_{ACB} (Pdx + Qdy) - \int_{ADB} (Pdx + Qdy) = \text{constant}$$

Προφανώς το ολοκλήρωμα

$$\oint_{ACBDA} (Pdx + Qdy)$$

έχει σταθερή τιμή, ίδια σε κάθε καμπύλη του τόπου R που περικλείει την οπή και δεν έχει κοινά σημεία με τον εαυτό της. Έστω c η τιμή αυτή. Τότε,

$$\begin{aligned} \oint_{ACBDA} (Pdx + Qdy) &= c \\ \Rightarrow \int_{ACB} (Pdx + Qdy) + \int_{BDA} (Pdx + Qdy) &= c \\ \Rightarrow \int_{ACB} (Pdx + Qdy) - \int_{ADB} (Pdx + Qdy) &= c \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3.4.4. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \left[\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} dy \right]$$

στις περιπτώσεις όπου:

i. $C : (x-2)^2 + y^2 = 1$ με θετική φορά

ii. $C : \eta \text{ περίμετρος του τετραγώνου } AB\Gamma\Delta, \text{ με } A(1, 1), B(-1, 1), \Gamma(-1, -1) \text{ και } \Delta(1, -1).$

Εδώ έχουμε:

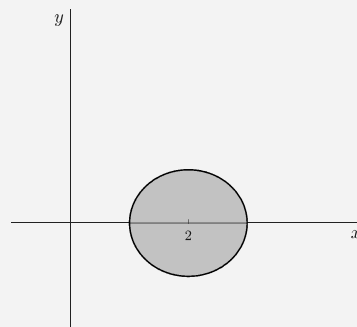
$$P(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{με} \quad P_y = \frac{x^2 (x^2 + y^2)^2 - x^2 y 2(x^2 + y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{x^6 - 2x^4 y^2 - 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$Q(x, y) = -\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{με} \quad Q_x = -\frac{3x^2 (x^2 + y^2)^2 - 2x^3 (x^2 + y^2) 2x}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{x^6 - 2x^4 y^2 - 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^4}$$

Οι P, Q, P_y, Q_x είναι συνεχείς συναρτήσεις στο xy -επίπεδο εκτός από τη θέση που μηδενίζεται ο παρανομαστής, δηλαδή $(x, y) = (0, 0)$. Εδώ ισχύει ότι $P_y = Q_x, \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

i. Η καμπύλη $C : (x-2)^2 + y^2 = 1$ είναι περιφέρεια κύκλου με κέντρο το $K(2, 0)$ και ακτίνα 1. Το $(0, 0)$ είναι εκτός της περιφέρειας C . Έτσι, οι P, Q είναι συνεχείς στην C και οι P_y, Q_x είναι συνεχείς στο χωρίο R . Από το Θεώρημα Green

$$\oint (Pdx + Qdy) = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy = 0, \quad \text{αφού} \quad P_y = Q_x$$



ii. Θεωρούμε ότι το $(0, 0)$ περιέχεται σε μια αυθαίρετα μικρή οπή. Αφού $P_y = Q_x$, το ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή σε κάθε κλειστή καμπύλη που δεν έχει σημείο τομής με τον εαυτό της και περικλείει την οπή. Μπορούμε να επιλέξουμε πιο εύκολη καμπύλη, π.χ. $C_1 : x^2 + y^2 = R^2$. Επομένως,

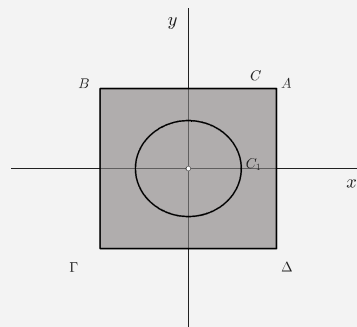
$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy)$$

Παραμετρική παράσταση της C_1 :

$$x = R \cos t, \quad dx = -R \sin t dt$$

$$y = R \sin t, \quad dy = R \cos t dt$$

$$\oint_{C_1} (Pdx + Qdy) = \dots = \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2 \cos^2 t R \sin t}{R^4} (-R \sin t dt) - \frac{R^3 \cos^2 t}{R^4} R \cos t dt \right] = \dots = -\pi$$



Εφαρμογή 3.4.5. Έστω $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ και $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Αν D είναι ο μοναδιαίος δίσκος, εξηγήστε γιατί το Θεώρημα Green δεν εφαρμόζεται σε αυτές τις συναρτήσεις.

Παραμετρική παράσταση του μοναδιαίου κύκλου:

$$x = \cos t, \quad dx = -\sin t dt$$

$$y = \sin t, \quad dy = \cos t dt, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Επομένως,

$$\int_{\partial D} (P dx + Q dy) = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t] dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

Ωστόσο, υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

προκύπτει ότι

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Οι συναρτήσεις P, Q δεν ορίζονται στο σημείο $(0, 0)$, και έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν μπορεί να γραφεί. Το Θεώρημα Green εφαρμόζεται σε συναρτήσεις που είναι C^1 σε όλο το D , πράγμα που δε συμβαίνει εδώ.

3.5 Τριπλά ολοκλήρωματα

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας γενικεύονται εύκολα σε κλειστά χωρία στις τρεις διαστάσεις.

I. Το χωρίο ολοκλήρωσης (V) είναι (ορθογώνιο) παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους άξονες.

$$\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$$

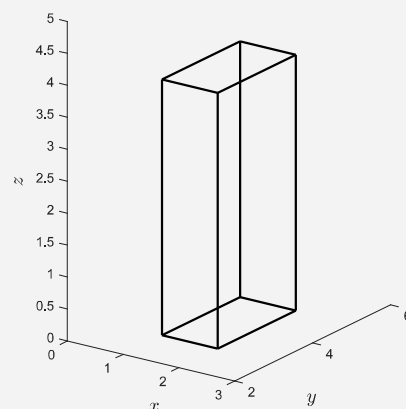
$$\beta_1 \leq y \leq \beta_2$$

$$\gamma_1 \leq z \leq \gamma_2$$

$$\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \rho(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

Εφαρμογή 3.5.1. Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης x^2yz στο παραλληλεπίπεδο με σύνορα: $x = 1, x = 2, y = 3, y = 5, z = 0, z = 4$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left[\int_3^5 \left(\int_0^4 x^2 y z dz \right) dy \right] dx = \int_1^2 \left(\int_3^5 x^2 y \int_0^4 z dz dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\int_3^5 x^2 y \frac{z^2}{2} \Big|_0^4 dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\int_3^5 8x^2 y dy \right) dx \\ &= \int_1^2 8x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_3^5 dx \\ &= \int_1^2 64x^2 dx = 64 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{448}{3} \end{aligned}$$



Παρατήρηση: Η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να είναι οποιαδήποτε στην περίπτωση αυτή.

II. Το χωρίο ολοκλήρωσης κλείνει κάτω από την επιφάνεια $z = z_1(x, y)$ και πάνω από την επιφάνεια $z = z_2(x, y)$, όπου οι επιφάνειες έχουν κοινή προβολή στο επίπεδο Oxy το χωρίο R .

$$\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz = \iint_R \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \rho(x, y, z) dz \right) dx dy, \quad \text{όπου} \quad z_1 \leq z \leq z_2$$

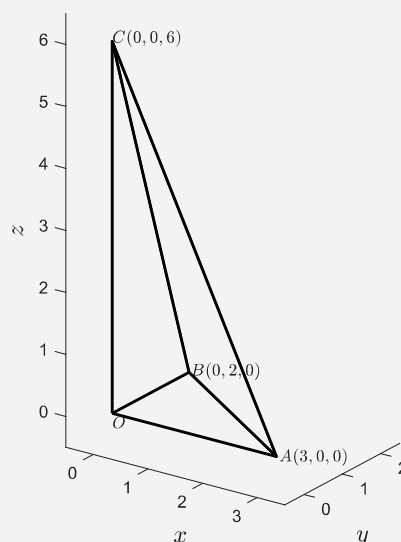
Εφαρμογή 3.5.2. Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$ στο χωρίο που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y + z = 6$.

Το χωρίο ολοκλήρωσης περικλείεται από τα επίπεδα

- $z = 0 \equiv z_1(x, y)$
- $2x + 3y + z = 6 \Rightarrow z = 6 - 2x - 3y \equiv z_2(x, y)$

με κοινή προβολή R στο επίπεδο Oxy το τρίγωνο OAB .

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \iint_R \left(\int_0^{6-2x-3y} xyz dz \right) dx dy \\ &= \iint_R xy \left(\int_0^{6-2x-3y} z dz \right) dx dy \\ &= \iint_R xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{6-2x-3y} dx dy \\ &= \iint_R \frac{1}{2} xy (6 - 2x - 3y)^2 dx dy \end{aligned} \quad (3.5.1)$$



Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος αυτού πρέπει να εκφράσουμε σωστά το χωρίο R . Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας $z = 0$. Επομένως ισχύει ότι $0 \leq x \leq 3$ και το y λαμβάνει τιμές μεταξύ του 0 και της ευθείας $2x + 3y = 6 \Rightarrow y = 2 - \frac{2x}{3}$.

$$(3.5.1) = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\int_0^{2-\frac{2x}{3}} xy(6-2x-3y)^2 dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\int_0^{2-\frac{2x}{3}} (36xy + 4x^3y + 9xy^3 - 2x^2y - 36xy^2 + 12x^2y^2) dy \right) dx \\ = \dots = 23.4$$

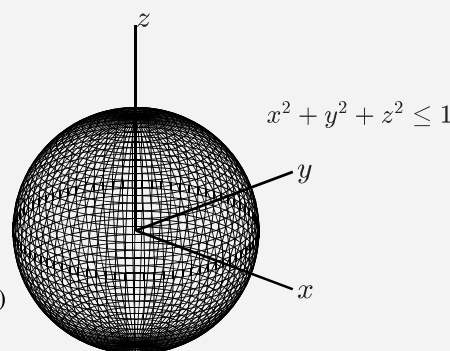
Εφαρμογή 3.5.3. Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ στο χωρίο $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Το σύνορο του χωρίου ολοκλήρωσης είναι η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 1.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2} \equiv z_1(x, y), & z < 0 \\ z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2} \equiv z_2(x, y), & z > 0 \end{cases}$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης περικλείεται από τις επιφάνειες z_1 και z_2 , με κοινή προβολή R στο xy -επίπεδο τον κυκλικό δίσκο με ακτίνα 1.

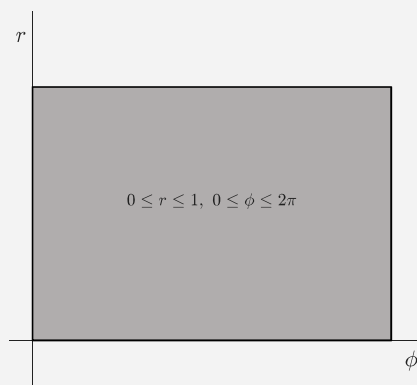
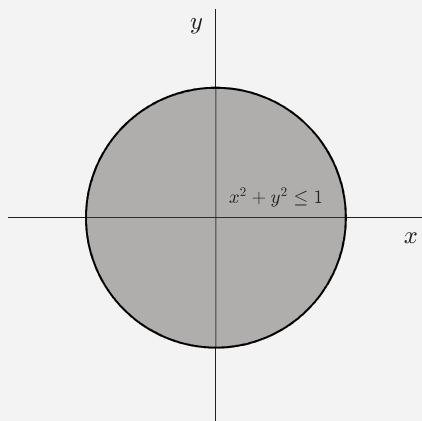
$$\begin{aligned} & \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \iint_R \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} (x^2 + y^2 + z^2) dz \right] dx dy \\ &= \iint_R \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \iint_R \left[2(x^2 + y^2) \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2-y^2}^3 \right] dx dy \quad (3.5.2) \end{aligned}$$



Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες. Επομένως, ο κυκλικός δίσκος R θα μετατραπεί σε ορθογώνιο D .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & 0 \leq r \leq 1 \\ y &= r \sin \phi & 0 \leq \phi < 2\pi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = r$$



$$\begin{aligned} (3.5.2) &= \iint_D \left(2r^2 \sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-r^2}^3 \right) r dr d\phi = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(2r^2 \sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-r^2}^3 \right) r d\phi \right] dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(2r^2 \sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-r^2}^3 \right) r dr = 2\pi \int_0^1 \left[2r^2 \sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3} (1-r^2) \sqrt{1-r^2} \right] r dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{4}{3} r^2 \sqrt{1-r^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-r^2} \right) r dr = \dots = \frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

Εφαρμογή 3.5.4. Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{2}{3}}}$$

όπου W το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2$, με $0 < \beta < \alpha$.

Το στερεό W είναι το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \alpha^2\}$.

Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες:

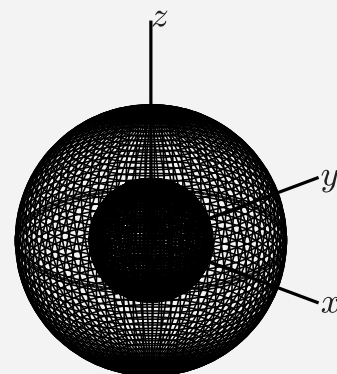
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad 0 \leq \phi < \pi$$

$$z = \rho \cos \phi \quad \beta \leq \rho \leq \alpha$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = -\rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{2}{3}}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_\beta^\alpha \frac{\rho^2 \sin \phi}{(\rho^2)^{\frac{2}{3}}} d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_\beta^\alpha \frac{\rho^2 \sin \phi}{\rho^3} d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_\beta^\alpha \frac{\sin \phi}{\rho} d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi \ln \rho \Big|_\beta^\alpha d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) d\theta d\phi \\ &= 2\pi \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^\pi \sin \phi d\phi = 4\pi \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3.5.5. Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_V \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{2}{3}} dV, \quad \text{όπου } V \text{ η μοναδιαία σφαίρα του } \mathbb{R}^3.$$

Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad 0 \leq \phi < \pi$$

$$z = \rho \cos \phi \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = -\rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{2}{3}} dV &= \iiint_{\mathbb{S}^1} \exp(\rho^2)^{\frac{2}{3}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho^3}}{3} \Big|_0^1 \sin \phi d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e-1}{3} \sin \phi d\theta d\phi = 2\pi \frac{e-1}{3} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{4\pi}{3}(e-1) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 3.5.6. Ένας στερεός δίσκος ακτίνας 9 και ύψους 2 τοποθετείται στην αρχή των αξόνων, ώστε να περιγράφεται από τις ανισώσεις $x^2 + y^2 \leq 81$ και $0 \leq z \leq 2$. Αν ο δίσκος έχει πυκνότητα που δίνεται από τη συνάρτηση $\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$, να βρείτε τη μάζα του.

Ο δίσκος καταλαμβάνει τον όγκο $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 81, 0 \leq z \leq 2\}$. Η μάζα του δίσκου δίνεται από τον τύπο

$$m_{\text{δίσκου}} = \iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1) dx dy dz \quad (3.5.3)$$

Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq r \leq 9$$

$$z = z \quad 0 \leq z \leq 2$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

$$(3.5.3) = \iiint_{V^*} (2r^2 + 2z^2 + 1) r dr d\theta dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^9 (2r^2 + 2z^2 + 1) r dr d\theta dz = \dots = 13716\pi$$

Εφαρμογή 3.5.7. Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = e^{-z}$ στη μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Η μέση τιμή της f στη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^1$ δίνεται από τη σχέση

$$f_{\text{average}} \equiv [f] = \frac{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz} \quad (3.5.4)$$

Ο παρανομαστής είναι ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας, συνεπώς ισούται με $\frac{4\pi}{3}$.

Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad 0 \leq \phi < \pi$$

$$z = \rho \cos \phi \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = -\rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\mathbb{S}^1} e^{-\rho \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-\rho \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \rho \int_0^\pi \rho \sin \phi e^{-\rho \cos \phi} d\phi d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho e^{-\rho \cos \phi} \Big|_0^\pi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho e^\rho - \rho e^{-\rho}) d\rho = 2\pi (\rho e^\rho - e^\rho + \rho e^{-\rho} + e^{-\rho}) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{e} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι $\int x e^x dx = x e^x - e^x$.

Επομένως, (3.5.4) $\Rightarrow [f] = \frac{4\pi/e}{4\pi/3} = \frac{3}{e}$.

3.6 Το Θεώρημα Stokes

Το Θεώρημα Stokes αναφέρεται σε επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ και αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Green.

Θεώρημα Stokes

Έστω ότι η S είναι μία κατά τμήματα C^2 φραγμένη και προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία C^1 συνάρτηση και ∂S το θετικά προσανατολισμένο σύνορο της S , το οποίο υποθέτουμε ότι είναι απλή κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε ισχύει

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad \text{όπου } d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$$

Παρατήρηση: Αν το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε η κυκλοφορία είναι μηδενική πάνω στην καμπύλη ∂S .

Εφαρμογή 3.6.1. Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{F} = (z, x, 2y)$. Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes στην επιφάνεια $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Η επιφάνεια S είναι το τμήμα του επιπέδου $x + y + z = 1$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο, αφού $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Σημεία τομής του επιπέδου με τους άξονες είναι τα $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$, $\Gamma(1, 0, 0)$. Άρα, η S είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με εξίσωση $z = 1 - x - y$. Ορίζουμε θετική φορά για το σύνορο ∂S της επιφάνειας την $B \rightarrow A \rightarrow \Gamma \rightarrow B$, οπότε, σύμφωνα

με τον κανόνα του δεξιού χεριού προκύπτει η φορά του διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ που προσανατολίζει την επιφάνεια S . Θα δείξουμε ότι

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

I. Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_A^\Gamma \mathbf{F} d\mathbf{l} + \int_\Gamma^B \mathbf{F} d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{F} d\mathbf{l} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

- Στη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$

$$\int_A^\Gamma \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_A^\Gamma (z, x, 2y)(dx, dy, dz) = \int_A^\Gamma (z dx + x dy + 2x dz) = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

Αφού η παραμετρική παράσταση του ευθ/μου τμήματος ΑΓ δίνεται από:

$$\begin{array}{lll} x(t) = t & dx = dt & x_A = 0 \Rightarrow t_A = 0 \\ y(t) = 0 & dy = 0 & \\ z(t) = 1 - t & dz = -dt & x_\Gamma = 1 \Rightarrow t_\Gamma = 1 \end{array}$$

- Στη διαδρομή $\Gamma \rightarrow B$

$$\int_\Gamma^B \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_\Gamma^B (z, x, 2y)(dx, dy, dz) = \int_\Gamma^B (z dx + x dy + 2x dz) = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

Αφού η παραμετρική παράσταση του ευθ/μου τμήματος ΓΒ δίνεται από:

$$\begin{array}{lll} x(t) = 1 - t & dx = -dt & x_\Gamma = 1 \Rightarrow t_\Gamma = 0 \\ y(t) = t & dy = dt & \\ z(t) = 0 & dz = 0 & x_B = 0 \Rightarrow t_B = 1 \end{array}$$

- Στη διαδρομή $B \rightarrow A$

$$\int_B^A \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_B^A (z, x, 2y)(dx, dy, dz) = \int_B^A (z dx + x dy + 2x dz) = \int_0^1 2(1-t) dt = 1$$

Αφού η παραμετρική παράσταση του ευθ/μου τμήματος ΒΑ δίνεται από:

$$\begin{array}{lll} x(t) = 0 & dx = 0 & y_B = 1 \Rightarrow t_B = 0 \\ y(t) = 1 - t & dy = -dt & \\ z(t) = t & dz = dt & y_A = 1 \Rightarrow t_A = 1 \end{array}$$

II. Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος

Η επιφάνεια S δίνεται στη μορφή $z = z(x, y) = 1 - x - y$ και η προβολή της στο xy -επίπεδο είναι το τρίγωνο ΟΑΒ. Υπολογίζουμε τον στροβιλισμό της συνάρτησης $\mathbf{F}$,

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Για προσανατολισμό προς τα πάνω ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$) ισχύει: $\hat{\mathbf{n}} dS = (-z_x, -z_y, 1) dx dy = (1, 1, 1) dx dy$

Άρα,

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{S} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S (2, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) dx dy = \iint_S 4 dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx \\ &= 4 \int_0^1 (1-x) dx = 4 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 2 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 3.6.2. Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes στην επιφάνεια $S : z = 2(x^2 + y^2)$, $z \leq 2$, αν $\mathbf{F} = (y, -x, y^2z)$.

Η επιφάνεια S είναι τμήμα του παραβολοειδούς $z = 2(x^2 + y^2)$ που αποκόπτεται από το επίπεδο $z = 2$. Το σύνολο ∂S προκύπτει από την τομή με $z = 2$:

$$2 = 2(x^2 + y^2) \implies x^2 + y^2 = 1,$$

άρα ∂S είναι ο κύκλος ακτίνας 1 στο επίπεδο $z = 2$. Θεωρούμε προσανατολισμό της S προς τα πάνω ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$), οπότε η θετική φορά στο ∂S είναι αντιωρολογιακή όπως τη βλέπουμε από τον θετικό ημιάξονα z . Θα δείξουμε ότι

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

I . Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Παραμετροποιούμε τον κύκλο ∂S (με αντιωρολογιακή φορά):

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Τότε

$$d\mathbf{l} = \mathbf{r}'(t) dt = (-\sin t, \cos t, 0) dt.$$

Πάνω στην καμπύλη έχουμε $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2$, άρα

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (y, -x, y^2z) = (\sin t, -\cos t, 2 \sin^2 t)$$

Επομένως,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (\sin t, -\cos t, 2 \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -dt$$

Άρα,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$$

II . Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος

Υπολογίζουμε πρώτα τον στροβιλισμό:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & y^2z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial(y^2z)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial(y^2z)}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = (2yz, 0, -2)$$

Η επιφάνεια είναι στη μορφή $z = z(x, y) = 2(x^2 + y^2)$. Για προσανατολισμό προς τα πάνω ισχύει:

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = (-z_x, -z_y, 1) dx dy$$

Υπολογίζουμε:

$$z_x = 4x, \quad z_y = 4y \implies (-z_x, -z_y, 1) = (-4x, -4y, 1)$$

Η προβολή της S στο xy -επίπεδο είναι ο δίσκος $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Άρα,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (2yz, 0, -2) \cdot (-4x, -4y, 1) dx dy = \iint_D (-8xyz - 2) dx dy = -2\pi$$