Άσκηση 1

Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο :

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot y\cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right)$, (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Λύση

(i) Ισχύει ότι : $\left|xy\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| = |xy|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |xy|$

αφού $\left|\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq 1$

και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (xy) = 0$ άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(xy\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 0.$

(ii) Θέτουμε $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,0) = f(0,y) = 0$

Για $x\neq 0$ και $y\neq 0$ έχουμε :

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Έχουμε $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$ και

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow[xy\neq 0]{(x,y)\to(0,0)} 0$$

αφού $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$

Οπότε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1\cdot 0 = 0$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί, εάν υπάρχει, το όριο:

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cdot \sin y + x^2 y}{x^2+y^4}$, (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^2}{2x^4+3y^2}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$, (iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x+y}-1-x-y}{x+y}$

Λύση

(i) Θέτουμε $f(x,y) = \dfrac{x\cdot \sin y + x^2 y}{x^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$

Όμως $f(x,x) = \dfrac{x\cdot \sin x + x^3}{x^2+x^4} = \dfrac{\sin x}{x+x^3} + \dfrac{x}{1+x^2} =$

$$= \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1\cdot 1 + 0 = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

(ii) Παρατηρούμε ότι στο κλάσμα η μεταβλητή x εμφανίζεται σε διπλάσια δύναμη από την y.

Στην περίπτωση αυτή θα πάρουμε το όριο κατά μήκος της καμπύλης $y=\lambda x^2$, λ σταθερά.

Τότε: $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\lambda x^2}} \frac{x^4-y^2}{2x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4-\lambda^2 x^4}{2x^4+3\lambda^2 x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1-\lambda^2)}{x^4(2+3\lambda^2)} = \frac{1-\lambda^2}{2+3\lambda^2}$$

Δηλαδή το όριο εξαρτάται από το λ, άρα από τη διαδρομή, και επομένως <u>δεν</u> υπάρχει.

(iii) Από την ανισότητα $|\sin u| \leq |u|$ έχουμε:

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}$$

και επειδή $|x^3+y^3| \leq |x^3| + |y^3|$ παίρνουμε:

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$$

και επειδή $|x|+|y| \to 0$ για $(x,y)\to(0,0)$ έχουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι 0.

(iv) Θέτουμε $u = x + y$ και τότε $u \to 0$ αφού $(x,y) \to (0,0)$ και έχουμε :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - (x+y)}{x+y} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1 - u}{u}$$

και με κανόνα L' Hospital

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1 - u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{1} = 0 .$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν, εάν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων για $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

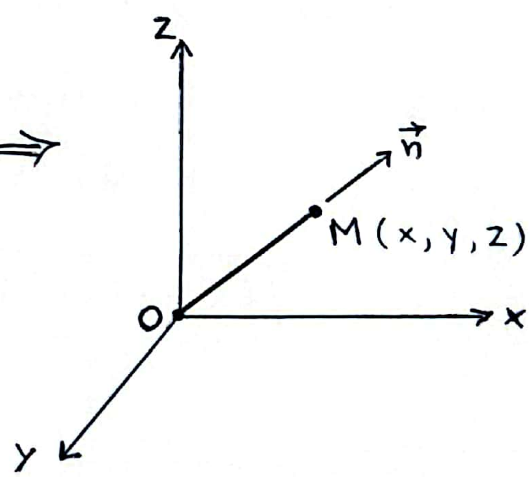
(i) $f(x,y,z) = \dfrac{2x^2+3yz}{x^2+y^2+z^2}$

(ii) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

Λύση

Εδώ έχουμε να υπολογίσουμε όρια συναρτήσεων 3 μεταβλητών. Ενεργούμε παρόμοια με την περίπτωση 2 μεταβλητών.

Υποθέτουμε πρώτα ότι το (x,y,z) τείνει στο $(0,0,0)$ κατά μήκος κάποιας ευθείας διαδρομής η οποία ορίζεται στον 3-d χώρο από το διάνυσμα $\vec{n}=(\kappa,\lambda,\mu)$.



Είναι: $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = t\vec{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y,z) = t(\kappa,\lambda,\mu) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x=t\kappa,\ y=t\lambda,\ z=t\mu\}$

όπου κ,λ,μ σταθεροί αριθμοί (για ορισμένη διεύθυνση) και $t\to 0$ όταν $(x,y,z)\to(0,0,0)$.

Άρα, κατά μήκος της διεύθυνσης του $\vec{n}=(\kappa,\lambda,\mu)$

έχουμε: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} f(x,y,z) = \lim_{t\to 0} f(t\kappa, t\lambda, t\mu)$

(Αν το όριο αυτό εξαρτάται από τα κ,λ,μ τότε εξαρτάται από τη διαδρομή άρα δεν υπάρχει. Διαφορετικά, υπολογίζεται.)

(i) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{2x^2+3yz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2(t\kappa)^2+3(t\lambda)(t\mu)}{(t\kappa)^2+(t\lambda)^2+(t\mu)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot(2\kappa^2+3\lambda\mu)}{t^2\cdot(\kappa^2+\lambda^2+\mu^2)} = \frac{2\kappa^2+3\lambda\mu}{\kappa^2+\lambda^2+\mu^2}$$

δηλαδή δεν υπάρχει

(ii) Με την ίδια μέθοδο κατά μήκος της ευθείας με διεύθυνση αυτή του $\vec{n}=(\kappa,\lambda,\mu)$ προκύπτει ότι το όριο είναι ίσο με **0**. Τώρα,

$x^2+y^2+z^2 = \sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^3}$ οπότε έχουμε

$$\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{|y|}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{|z|}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} \leq$$

$$\leq \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{|z|}{\sqrt[3]{z^2}} = \sqrt[3]{|x|} \cdot \sqrt[3]{|y|} \cdot \sqrt[3]{|z|} =$$

$$= \sqrt[3]{|x \cdot y \cdot z|} \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς } (x,y,z) \to (0,0,0)$$

άρα όντως το ζητούμενο όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0.

Άσκηση 4

Δίνεται η $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$$

α) Αποδείξτε ότι $\forall \lambda>0$ με $\lambda\neq 1$ το $\lim_{x\to 0} f(x,x^\lambda)$ υπάρχει.

β) Αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Λύση

α) $f(x,x^\lambda)=\dfrac{x^{\lambda+1}}{x-x^\lambda}$ για $x\neq 0$ και x "κοντά" στο 0.

Παίρνουμε περιπτώσεις:

(i) <u>Αν $\lambda>1$</u> : $f(x,x^\lambda)=\dfrac{x^{\lambda+1}}{x(1-x^{\lambda-1})}=\dfrac{x^\lambda}{1-x^{\lambda-1}}\xrightarrow{x\to 0}\dfrac{0}{1-0}=0$

αφού $\lambda>1$

(ii) <u>Αν $0<\lambda<1$</u> : $f(x,x^\lambda)=\dfrac{x^{\lambda+1}}{x^\lambda(x^{1-\lambda}-1)}=\dfrac{x}{x^{1-\lambda}-1}\xrightarrow{x\to 0} 0$

αφού $1-\lambda>0$

β) Παρατηρούμε ότι $f(x,\mu x) = \dfrac{\mu x^2}{(1-\mu)x} = \dfrac{\mu x}{1-\mu} \to 0$

καθώς $x \to 0$ και για $\mu \neq 1$.

<u>Σκέψη</u>: Αν κατά μήκος κάποιας καμπύλης $y = g(x)$

ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ και $f(x, g(x)) = 1 \quad \forall x$

κοντά στο 0 με $x \neq 0$, τότε προφανώς

$\lim\limits_{x\to 0} f(x, g(x)) = 1$ και άρα δεν μπορεί να ισχύει

ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad \forall y \neq x$ διότι προσεγγίζοντας

από τη διαδρομή $(x, g(x))$ πλησιάζουμε στο 1 όχι

στο 0.

Έχουμε : $f(x,y) = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{xy}{x-y} = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{x+1}$

και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+1} = 0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0} f\left(x, \dfrac{x}{x+1}\right) = 1$ άρα βάση των παραπάνω

<u>δεν</u> υπάρκει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Άσκηση 5

Δίνεται η $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Να δείξετε ότι υπάρχουν τα διαδοχικά όρια

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ και ότι είναι ίσα,

αλλά δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Λύση

Για $x \in \mathbb{R}|\{0\}$ σταθερό έχουμε $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

Ομοίως, για $y \in \mathbb{R}|\{0\}$ σταθερό έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0\cdot y}{0+y^2} = 0$$

οπότε $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$

Τώρα θα δείξουμε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει

Πράγματι $f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$

Επίσης $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{2}$ άρα δεν υπάρχει το όριο.

Άσκηση 6

Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις να εξετασθεί αν υπάρχουν και να βρεθούν τα διαδοχικά όρια καθώς και το όριο για $(x,y) \to (0,0)$:

(i) $\dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, (ii) $\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Λύση

(i) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2 + y^3}{y^2} = -1 + y$$

για y σταθεροποιημένο, άρα

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = -1$$ και

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1 + x$$ για x σταθερό

άρα $$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 1$$

Τα διαδοχικά όρια διαφορετικά άρα δεν υπάρχει το όριο.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} y \cdot \dfrac{\sin(xy)}{xy} = y \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = y \cdot 1 = y$

για y σταθερό άρα

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

Όμοια έχουμε: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{y\to 0} y \cdot \dfrac{\sin(xy)}{xy} =$

$$= \lim_{y\to 0} y \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} = 0 \cdot 1 = 0$$

για x σταθερό και $x \neq 0$, άρα

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Αφού τα διαδοχικά όρια είναι ίσα τότε ΑΝ υπάρχει το όριο για $(x,y)\to(0,0)$ θα ισούται με 0.

Έχουμε: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y \cdot \dfrac{\sin(xy)}{xy} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 0 \cdot 1 = 0 .$$

Άσκηση 7

Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} &, (x,y)\neq(0,0) \\ 1/2 &, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Λύση

Για $(x,y)\neq(0,0)$ η συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για $(x,y)=(0,0)$ τώρα:

$$f(x,y) = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}$$ άρα

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}\right) = \frac{1}{2} = f(0,0)$$

άρα συνεχής και στο $(0,0)$ άρα παντού.

Άσκηση 8

Για τις διάφορες τιμές του $a>0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a}$

Εξετάστε για ποιες τιμές του $a>0$ μπορεί η f να επεκταθεί σε συνεχή στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0$ (1)

Συνεπώς η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή στο $\mathbb{R}^2 \iff$ υπάρχει το $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \in \mathbb{R}$ και κάνει 0 (λόγω της (1)).

Για $a>1$: Έχουμε ότι $f(x,x) = \dfrac{x^2}{(2x^2)^a} = \dfrac{1}{2^a \cdot x^a}$

το οποίο τείνει στο $+\infty$ για $x \to 0^+$

άρα δεν υπάρχει το όριο.

Για $a=1$: $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{2}$

άρα **δεν** υπάρχει το όριο.

Για $0<a<1$:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^a} = \frac{|xy|}{x^2+y^2}(x^2+y^2)^{1-a} \quad (*)$$

Όμως $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \iff x^2 - 2\cdot|x|\cdot|y| + y^2 \geq 0 \iff$

$$\iff 2\cdot|x|\cdot|y| \leq x^2+y^2 \iff \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

Άρα $(*) \leq \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{1-a} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Οπότε $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

Άρα για $0<a<1$ η f επεκτείνεται συνεχώς στο $\mathbb{R}^2$.