Ανώτερης τάξης

Μερικές Παράγωγοι

Άσκηση 1

Βρείτε τις f_{yx} και f_{xy} για την $f(x,y)=x\cdot\sin(xy)$

Λύση

$f_x=\sin(xy)+xy\cdot\cos(xy)$ και $f_y=x^2\cdot\cos(xy)$

Άρα $f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}f_y=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot\cos(xy)\right)=2x\cdot\cos(xy)-x^2\cdot y\cdot\sin(xy)$

και $f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}f_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(xy)+xy\cdot\cos(xy)\right)=$

$$=x\cdot\cos(xy)+x\cdot\cos(xy)+xy\cdot\left(-\sin(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)$$

$$=2x\cdot\cos(xy)-x^2\cdot y\cdot\sin(xy)$$

(Εδώ $f_{xy}=f_{yx}$)

Γενικά <u>δεν</u> ισχύει πάντα ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$

Το πότε ισχύει μας το λέει το Θεώρημα Clairaut ή αλλιώς Θεώρημα Schwartz (βλ. Θεωρία).

Άσκηση 2

Αν $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} &, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Βρείτε τις f_{xy} και f_{yx}.

Λύση

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right) &, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Άρα $f_x(0,y) = -y$, $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ άρα $f_{xy}(0,0) = -1$ (με όριο ορισμού 2ης μερικής παραγώγου)

$$f_y = \begin{cases} \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^2}\left(y^4+4x^2y^2-x^4\right) &, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Άρα $f_y(x,0) = x$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ άρα $f_{yx}(0,0) = 1$ (με το όριο του ορισμού)

Οπότε εδώ $f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$.

Άσκηση 3

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] & (u(x,y), v(x,y)) \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

με u, v, f C^2

Να υπολογισθούν οι $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Λύση

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

τότε $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Θέτω $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u} = g(u,v)$ για ευκολία.

$$a = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(u,v) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial g(u,v)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g(u,v) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] + g(u,v) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

οπότε $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a + B = \ldots$

Ανάλογα για το $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι η $f(x,y,z) = e^{5x} \cdot \sin(3y) \cdot \cos(4z)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace και οι λύσεις της ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις.

Συμβολίζεται: $\Delta f = 0$ για μία f που είναι C^2,

όπου Δ ο τελεστής Laplace με $\Delta = \nabla \cdot \nabla =$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Λύση

$f_x = 5e^{5x} \cdot \sin(3y) \cdot \cos(4z)$ άρα

$f_{xx} = 25e^{5x} \cdot \sin(3y) \cdot \cos(4z)$

$f_y = 3e^{5x} \cdot \cos(4z) \cdot \cos(3y)$ άρα

$f_{yy} = -9e^{5x} \cdot \sin(3y) \cdot \cos(4z)$

$f_z = -4e^{5x} \cdot \sin(3y) \cdot \sin(4z)$ άρα

$f_{zz} = -16\, e^{5x} \cdot \sin(3y) \cdot \cos(4z)$

και εύκολα επαληθεύεται ότι $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$

δηλαδή η f είναι αρμονική.

Άσκηση 5

Να βρεθεί η γενική μορφή των συναρτήσεων $f(x,y)$ που ικανοποιούν τη σχέση $f_{xy}=0$.

Λύση

Ακολουθούμε αντίστροφη διαδικασία δηλαδή ολοκλήρωση:

$f_{xy}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=0$ και ολοκληρώνουμε

ως προς y πρώτα και έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int 0\,dy + c_1(x) = c_1(x) \qquad (1)$$

(ολοκληρώνοντας ως προς y το x αντιμετωπίζεται ως σταθερά, για αυτό και η αυθαίρετη συνάρτηση ως προς x)

Τώρα ολοκληρώνουμε την (1) ως προς x:

$f(x,y)=\int c_1(x)\,dx + c_2(y)$ που είναι της μορφής

$\varphi(x)+g(y)$ άρα γενικά $f(x,y)=\varphi(x)+g(y)$

(φ, g οποιεσδήποτε συναρτήσεις).