Διαφορισιμότητα

Έστω $\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $\underline{x}_0 \in A$.

- Αν $n=m=1$ τότε $Df(x_0) = f'(x_0)$
- Αν $n=1$ και $m \geq 2$ τότε $\underline{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$

  και $D\underline{f}(t_0) = (f_1'(t_0), \dots, f_m'(t_0))$
- Αν $n \geq 2$ και $m=1$ τότε $Df(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0)$
- Αν $n, m \geq 2$ τότε $D\underline{f}(\underline{x}_0) =$ πίνακας Jacobi στο $\underline{x}_0$

  ο οποίος ορίζεται ως $\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \cdots & \frac{df_m}{dx_n} \end{bmatrix}(\underline{x}_0)$

Μεθοδολογία: Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f(\underline{x})$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\underline{x}_0$ με "ιδιαιτερότητες", τότε εργαζόμαστε ως ακολούθως:

(α) Ελέγχουμε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στη θέση $\underline{x}_0$. (Αν μια τουλάχιστον δεν υπάρχει από αυτές τότε η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $\underline{x}_0$). Αν υπάρχουν όλες οι μερικές στο $\underline{x}_0$ τότε:

(β) Ελέγχουμε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\underline{x}_0$.

(Αν δεν είναι τότε δεν είναι και διαφορίσιμη στο $\underline{x}_0$).

Αν είναι συνεχής στο $\underline{x}_0$ τότε:

(γ) Θεωρούμε το όριο:

$$l = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - Df(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)}{\| \underline{x} - \underline{x}_0 \|}$$

(διαφορετική εκδοχή του ορισμού)

Αν $l = 0$ τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\underline{x}_0$.

Διαφορετικά δεν είναι.

Αλλιώς, δουλεύουμε με το Θεώρημα που λέει ότι αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο $\underline{x}_0$ και αυτές είναι συνεχείς σε μία γειτονιά του τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\underline{x}_0$.

(πχ. αν εφαρμόσουμε αυτό το Θεώρημα στην άσκηση 3 θα καταλήξουμε ότι η μερική $f_x(0,0)$ δεν είναι συνεχής και άρα η f μη διαφορίσιμη στο (0,0))

Άσκηση 1

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+y^2}{x^2+y^2} , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 , & (x,y)=0 \end{cases}$

είναι διαφορίσιμη.

Λύση

Προφανώς για $(x,y)\neq(0,0)$ η f είναι διαφορίσιμη ως πράξεις διαφορίσιμων.

Στο $(0,0)$ ελέγχουμε αν υπάρχουν πρώτα οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y :

$$f_x(0,0) = \frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3+0^2}{x^2+0^2}-0}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$f_y(0,0) = \frac{df}{dy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0^3+y^2}{0^2+y^2}-0}{y-0}$$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{y}$ το οποίο δεν υπάρκει αφού για $y\to 0^+$ κάνει $+\infty$ και για $y\to 0^-$ κάνει $-\infty$ άρα δεν υπάρκει $f_y(0,0)$ και άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 2

Να ελεγχθεί αν η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση

Αρχικά, ελέγχουμε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$:

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

Άρα προχωράμε στη μελέτη της συνέχειας στο $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ το οποίο <u>δεν</u> υπάρχει

(βλ. ασκ. 5 17/10)

άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 3

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

Για την συνέχεια της f στο $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0) \quad (\beta\lambda.\ \alpha\sigma\kappa.\ 1\ 17/10)$$

οπότε f συνεχής στο $(0,0)$.

Οπότε προχωράμε στη μελέτη του ορίου του ορισμού της διαφορισιμότητας:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0}\frac{f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)-Df(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0)}{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}$$

όπου εδώ $\underline{x}_0=(0,0)$ και αφού $n=2$ και $m=1$

(γιατί $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$) τότε $Df(\underline{x}_0)=\nabla f(\underline{x}_0)$

Κανόνας

Αλυσίδας

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $w=f(u,v)$. Αν $u=u(x,y,z)$ και $v=v(x,y,z)$ να βρεθούν οι εκφράσεις των μερικών παραγώγων w_x, w_y, w_z ως συναρτήσεις των w_u, w_v και των μερικών παραγώγων των u,v ως προς x,y,z.

Λύση

Η συνάρτηση w είναι σύνθετη συνάρτηση των μεταβλητών x,y,z δια μέσου των u,v. Άρα:

$$\frac{dw}{dx} = w_x = w_u \cdot u_x + w_v \cdot v_x \quad \left(= \frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{dw}{dy} = w_y = w_u \cdot u_y + w_v \cdot v_y$$

$$\frac{dw}{dz} = w_z = w_u \cdot u_z + w_v \cdot v_z$$

Άσκηση 2

Δίνεται $f(w) = w \cdot e^{-w} \cdot \cos w$ όπου $w = x^2 + y^2$.

Να βρεθεί η f_x και η f_y.

Λύση

$$\frac{df}{dx} = f_x = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = f'(w) \cdot w_x$$

όμως $f'(w) = e^{-w} \cdot (\cos w - w \cdot \cos w - w \cdot \sin w)$

και $w_x = 2x$

άρα $f_x = e^{-w} \cdot (\cos w - w \cdot \cos w - w \cdot \sin w) \cdot 2x$

και αντικαθιστούμε όπου w με $x^2 + y^2$

Ομοίως $f_y = \frac{df}{dy} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dy} = f'(w) \cdot w_y =$

$$= e^{-w} \cdot (\cos w - w \cdot \cos w - w \cdot \sin w) \cdot 2y$$

και όπου w βάζουμε $x^2 + y^2$.

Άσκηση 3

Δίνεται $\underline{f}(u,v) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} u+v \\ u \cdot v \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array}$ και $\underline{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^3 \\ x+y \end{pmatrix} \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{array}$

και $\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι $\dfrac{dh_1}{du}$, $\dfrac{dh_3}{dv}$.

Λύση

$$\begin{tikzcd}
(u,v) \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[dr, "\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f}"'] & \mathbb{R}^2 \text{ δηλαδή } (x,y) \arrow[d, "\underline{g}"] \\
& \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$$\underline{h}(u,v) = (\underline{g} \circ \underline{f})(u,v) = \underline{g}(\overset{x}{u+v}, \overset{y}{u \cdot v}) =$$

$$= \left((u+v)^2 + u^2 v^2 ,\ (u+v)^3 ,\ (u+v) + u \cdot v \right) =$$

$$= (h_1, h_2, h_3)$$

Άρα $\dfrac{dh_1}{du} = 2(u+v) + 2uv^2$

$$\frac{dh_3}{dv} = 1 + u$$

Με κανόνα αλυσίδας

Επειδή εδώ έχουμε διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών τα διαφορικά είναι πίνακες Jacobi. Άρα:

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{du} & \frac{dh_1}{dv} \\ \frac{dh_2}{du} & \frac{dh_2}{dv} \\ \frac{dh_3}{du} & \frac{dh_3}{dv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dx} & \frac{dg_1}{dy} \\ \frac{dg_2}{dx} & \frac{dg_2}{dy} \\ \frac{dg_3}{dx} & \frac{dg_3}{dy} \end{bmatrix}_{(u+v,\, u\cdot v)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} \\ \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dh_1}{du} = \left.\frac{dg_1}{dx}\right|_{(u+v,\, u\cdot v)} \cdot \frac{df_1}{du} + \left.\frac{dg_1}{dy}\right|_{(u+v,\, u\cdot v)} \cdot \frac{df_2}{du} =$$

$$= \left.2x\right|_{(u+v,\, u\cdot v)} \cdot 1 + \left.2y\right|_{(u+v,\, u\cdot v)} \cdot v =$$

$= 2(u+v) + 2uv^2$ όπως βρήκαμε και πριν!

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $z=f(x,y)$. Αν $x=e^{u}\cdot\cos v$ και $y=e^{u}\cdot\sin v$ να δειχθεί η σχέση:

$$z_x^2+z_y^2=e^{-2u}\cdot\left(z_u^2+z_v^2\right)$$

Λύση

Θα ξεκινήσουμε από το β΄ μέλος και θα καταλήξουμε στο α΄.

$z=f(x,y)$ με $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$ άρα με κανόνα αλυσίδας: $\frac{dz}{du}=z_u=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{du}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{du}$ (1)

$$\frac{dz}{dv}=z_v=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dv}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dv} \quad (2)$$

Όμως, $\frac{dx}{du}=e^{u}\cdot\cos v$, $\frac{dx}{dv}=-e^{u}\cdot\sin v$,

$\frac{dy}{du}=e^{u}\cdot\sin v$, $\frac{dy}{dv}=e^{u}\cdot\cos v$

Άρα (1) $=z_x\cdot e^{u}\cdot\cos v+z_y\cdot e^{u}\cdot\sin v$ και

(2) $=z_x\cdot(-e^{u}\cdot\sin v)+z_y\cdot e^{u}\cdot\cos v$

Άρα

$$e^{-2u}\cdot\left(z_u^2+z_v^2\right)=$$

$$=e^{-2u}\cdot\Big(z_x^2\cdot e^{2u}\cdot\cos^2 v+\cancel{2\cdot z_x\cdot z_y\cdot e^{2u}\cdot\cos v\cdot\sin v}+z_y^2\cdot e^{2u}\cdot\sin^2 v+$$

$$+z_x^2\cdot e^{2u}\cdot\sin^2 v-\cancel{2\cdot z_x\cdot z_y\cdot e^{2u}\cdot\cos v\cdot\sin v}+z_y^2\cdot e^{2u}\cdot\cos^2 v\Big)=$$

$$=\cancel{e^{-2u}}\cdot\left[z_x^2\cdot\cancel{e^{2u}}\cdot\underbrace{\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)}_{1}+z_y^2\cdot\cancel{e^{2u}}\cdot\underbrace{\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)}_{1}\right]=$$

$$=z_x^2+z_y^2.$$