D "απλό", δηλαδή $D=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\subseteq\mathbb{R}^2$ $(\alpha<\beta,\ \gamma<\delta)$

Αν η f είναι συνεχής, τότε: $\iint_D f=\int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f\,dy\right)dx=\int_\gamma^\delta\left(\int_\alpha^\beta f\,dx\right)dy$

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα:

(i) $\iint_D 2xy\,dx\,dy$ όπου D ο τόπος με σύνορα $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1$

(ii) $\iint_D (3x+2y)\,dx\,dy$ όπου D ο τόπος με σύνορα $x=1,\ x=4,\ y=0,\ y=2$

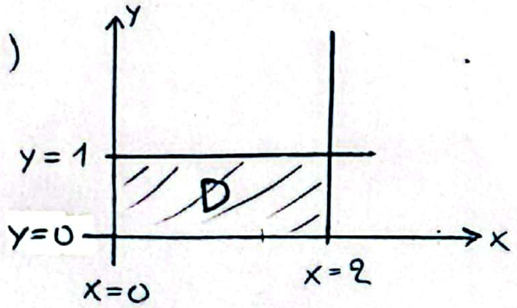
(iii) $\iint_D x\cos y\,dx\,dy$ όπου $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ -1\le x\le 2\ ,\ -\pi\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$

(iv) $\iint_D |x|\,dx\,dy$ όπου $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ -2\le x\le 3\ ,\ 0<y<1\right\}$

(v) $\iint_D xe^y\,dx\,dy$ όπου $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le x\le 3\ ,\ 1\le y<\ln 5\right\}$

Λύση:

(i)



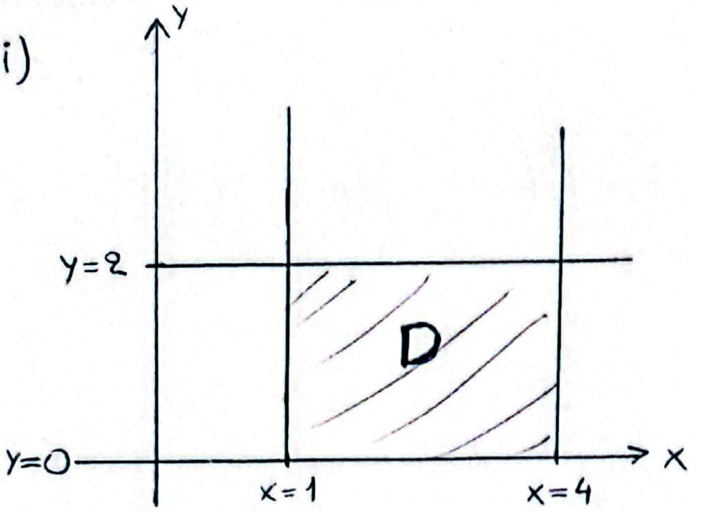
$$\iint_D 2xy\,dx\,dy=2\int_0^1\left(\int_0^2 xy\,dx\right)dy=$$

$$=2\int_0^1 y\left(\int_0^2 x\,dx\right)dy=2\int_0^1 y\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=2}\right)dy=$$

$$=2\cdot\int_0^1 y\cdot 2\,dy=4\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1}=2$$

Φυσικά εδώ και το $\int_0^2\int_0^1 2xy\,dy\,dx$ να υπολογίζαμε το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε.

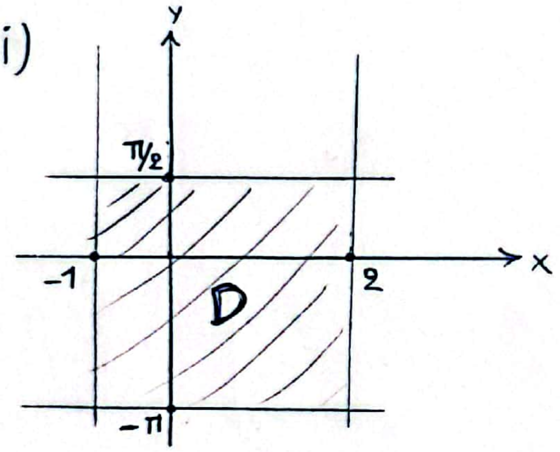
(ii)



$$\iint_D (3x+2y)\,dx\,dy = \int_1^4 \int_0^2 (3x+2y)\,dy\,dx = \int_1^4 \left(3xy + y^2 \Big|_{y=0}^{y=2}\right) dx =$$

$$= \int_1^4 (6x+4)\,dx = 6\frac{x^2}{2} + 4x \Big|_{x=1}^{x=4} = 49$$

(iii)

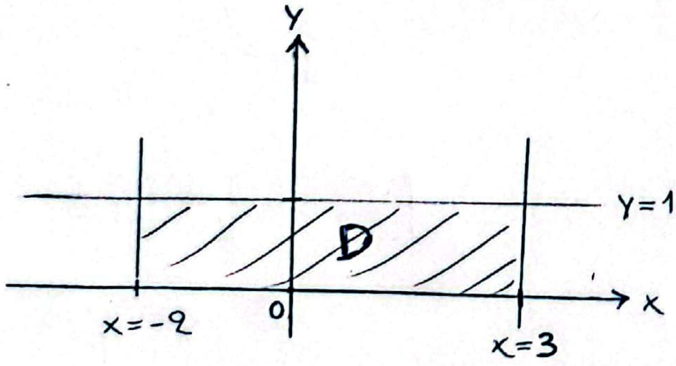


$$\iint_D x\cos y\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} \int_{-\pi}^{\pi/2} x\cdot\cos y\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x\cdot \sin y \Big|_{y=-\pi}^{y=\pi/2} dx = \int_{-1}^{2} x\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=2} = \frac{3}{2}$$

(iv)



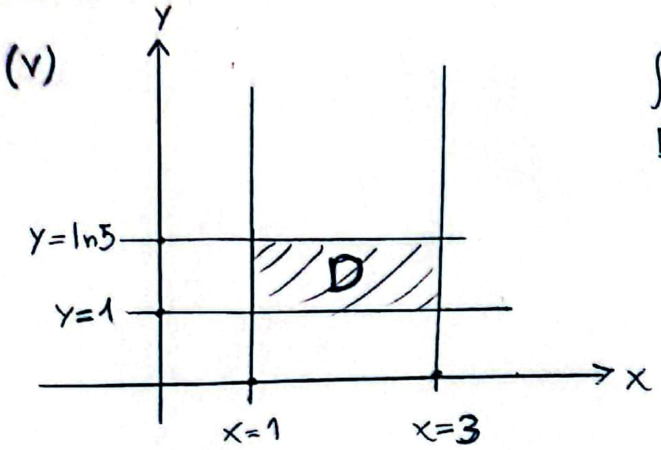
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{για } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{για } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Άρα $$\iint_D |x|\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} \int_0^1 -x\,dy\,dx + \int_0^3 \int_0^1 x\,dy\,dx =$$

$$= -\int_{-2}^{0} x \int_0^1 dy\,dx + \int_0^3 x \int_0^1 dy\,dx = -\int_{-2}^{0} x\cdot y\Big|_{y=0}^{y=1} dx + \int_0^3 x\cdot y\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= -\int_{-2}^{0} x\,dx + \int_0^3 x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{x=-2}^{x=0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{13}{2}.$$

(v)



$$\iint_D x e^y \, dx\, dy = \int_1^3 \int_1^{\ln 5} x e^y \, dy\, dx =$$

$$= \int_1^3 x \cdot \int_1^{\ln 5} y \, dy\, dx = \int_1^3 x \cdot e^y \Big|_1^{\ln 5} dx =$$

$$= \int_1^3 x \cdot \underbrace{(e^{\ln 5} - e)}_{5-e} dx = (5-e) \cdot \int_1^3 x\, dx =$$

$$= (5-e) \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 4(5-e) .$$

<u>Πρόταση</u>: $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής με $D \subseteq \mathbb{R}^2$

(i) D "x-απλό" (ή x-κανονικό) όταν

$$D = \{ (x,y) : a \leq x \leq \beta ,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$ με

$\varphi_1, \varphi_2 : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς.

Τότε $$\iint_D f = \int_a^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx .$$

(ii) D "y-απλό" (ή y-κανονικό) όταν

$$D = \{ (x,y) : \gamma \leq y \leq \delta ,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$ με

$\psi_1, \psi_2 : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς.

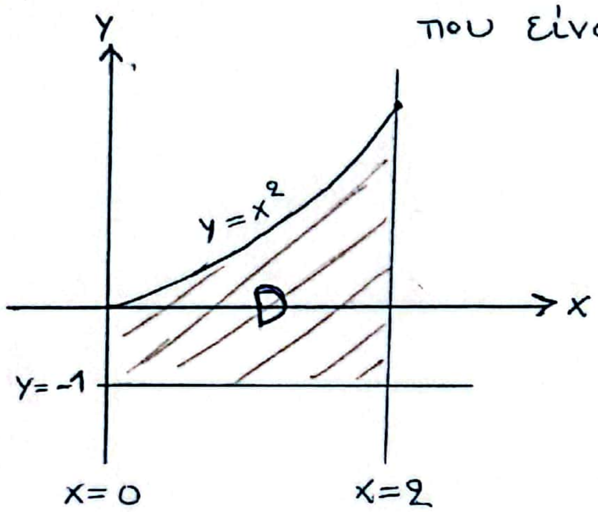
Τότε $$\iint_D f = \int_\gamma^\delta \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy .$$

<u>Γενικά</u>, εμβαδόν επίπεδου τόπου D δίνεται από τον τύπο: (i) $E = \iint_D dx\,dy$ αν D y-απλό ή

(ii) $E = \iint_D dy\,dx$ αν D x-απλό

<u>Παράδειγμα</u>:

Το εμβαδόν του τόπου $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 \,,\ -1 \leq y \leq x^2\}$ που είναι x-απλό



$$E = \iint_D dy\,dx = \int_0^2 \int_{-1}^{x^2} dy\,dx = \int_0^2 y \Big|_{y=-1}^{y=x^2} dx = \int_0^2 x^2+1\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^2 = \frac{14}{3} \,.$$

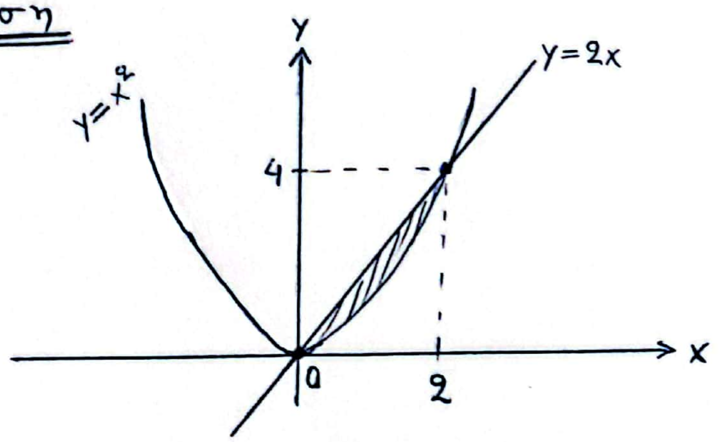
Σαρώθηκε με το CamScanner

Άσκηση 2

Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 \, dy \, dx$

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και γράψτε το ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη. Στη συνέχεια υπολογίστε το I και με τις δύο φορές.

Λύση



$0 \le x \le 2$

$x^2 \le y \le 2x$

Το χωρίο είναι x-απλό και πρέπει για να αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης να το κάνουμε y-απλό.

Οπότε $\quad 0 \le x^2 \le y \le 2x \le 4$ άρα (αφού $x \ge 0$, $y \ge 0$) έχουμε

ότι $\quad 0 \le y \le 4$ και $\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$. Συνεπώς:

$$I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy = \int_0^4 y^2 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x \, dx \, dy = \int_0^4 y^2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^4 y^2 \cdot \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \right) dy = \int_0^4 \frac{y^3}{2} - \frac{y^4}{8} \, dy = \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^5}{40} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{32}{5}.$$

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x y^2 \, dy \, dx = \int_0^2 x \int_{x^2}^{2x} y^2 \, dy \, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_0^2 x \cdot \left(\frac{8x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \int_0^2 \frac{8x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \, dx = \left[\frac{8x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{32}{5} \, .$$

Άσκηση 3

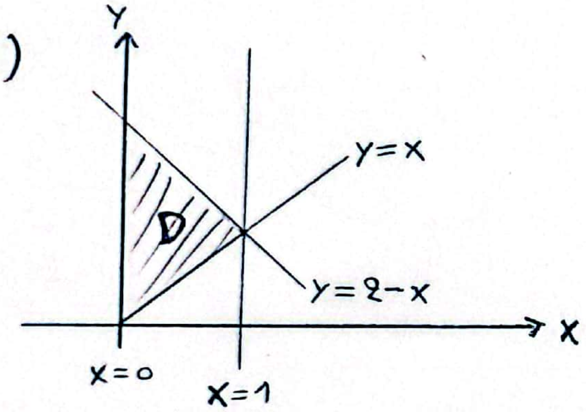
Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα :

(i) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2-x}\frac{x}{y}\,dy\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\,dy$ (iii) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x\,dx\,dy$

(iv) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}}(1-x^3)^{1/2}\,dx\,dy$

Λύση

(i)



$$I=\int_0^1 x\int_x^{2-x}\frac{1}{y}\,dy\,dx=\int_0^1 x\cdot\ln|y|\Big|_{y=x}^{y=2-x}dx$$

$$=\int_0^1 x\big(\ln|2-x|-\ln|x|\big)dx=$$

$$=\int_0^1 x\cdot\big(\ln(2-x)-\ln x\big)dx$$

αφού $0<x<1$ και άρα και $2-x>0$

Οπότε $\displaystyle I=\int_0^1 x\cdot\ln(2-x)\,dx-\int_0^1 x\cdot\ln x\,dx = I_1 - I_2$

$\displaystyle I_2=\int_0^1 x\cdot\ln x\,dx$ με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$I_2=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\ln 1-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right)-\int_0^1\frac{x}{2}\,dx$$

Όμως $\ln 1=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{2}{x^2}}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{4}\right)=0$

Άρα $I_2 = 0 - \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = -\frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$

$$I_1 = \int_0^1 x\cdot\ln(2-x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(2-x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{2-x}\cdot(-1)\,dx =$$

$$= (0-0) - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{x^2}{x-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x-2}\,dx$$

Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή μεγαλύτερος του βαθμού του παρανομαστή, άρα

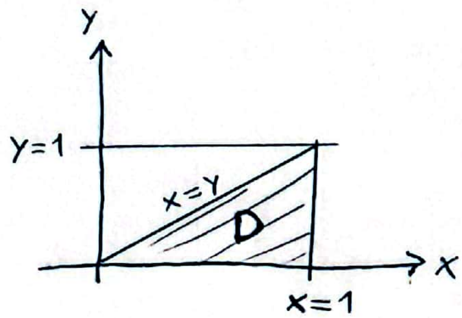
$$I_1 = -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{(x-2)(x+2)+4}{x-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2} + 2x + 4\cdot\ln|x-2|\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2} + 2 + 4\cdot\underbrace{\ln 1}_{0} - 4\cdot\ln 2\right]$$

$$= -\frac{1}{4} - 1 + 2\cdot\ln 2$$

Άρα $I = I_1 - I_2 = \cancel{-\frac{1}{4}} - 1 + 2\ln 2 + \cancel{\frac{1}{4}} = -1 + 2\cdot\ln 2$.

(ii) $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \ , \ y \le x \le 1\}$



είναι y-απλός και για ευκολία θα τον κάνουμε x-απλό, δηλαδή

$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le x\}$

Τότε $I = \int_0^1\int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\int_0^x dy\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\cdot y\Big|_{y=0}^{y=x} dx$

$$= \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

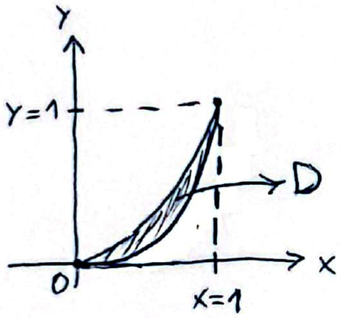
(iii) $$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Bigg|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (1-y)^2 - (1-y^2) \, dy = \int_0^1 y^2 - y \, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

(iv) $D = \{ (x,y) : 0 \le y \le 1 \ , \ \sqrt{y} \le x \le \sqrt[5]{y} \}$ y-απλό

ως x-απλό θα είναι $D = \{ (x,y) : 0 \le x \le 1 \ , \ x^5 \le y \le x^2 \}$



$$I = \int_0^1 \int_{x^5}^{x^2} (1-x^3)^{1/2} \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x^3)^{1/2} \cdot y \Bigg|_{y=x^5}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x^3)^{1/2} \cdot (x^2 - x^5) \, dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 (1-x^3)^{3/2} dx = \left[-\frac{(1-x^3)^{5/2}}{5/2} \cdot \frac{1}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{15} .$$