ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN

Το Θ. Green εξισώνει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω από μια κλειστή καμπύλη με επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω από το εσωτερικό της καμπύλης.

ΛΗΜΜΑ 1

Εστω D ενα x-απλό $\subseteq \mathbb{R}^2$ και $C := \partial D$. Επίσης έστω $P: D \to \mathbb{R}$ C^1-διαφορίσιμη, και $F = (P, 0): D \to \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\int_{C^+} F \cdot dr = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy.$$

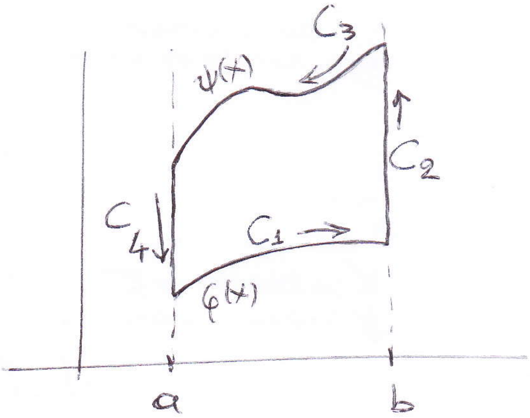
<u>Απόδειξη.</u>

Αφού D x-απλό, είναι της μορφής

$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

με $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^1-διαφορ.,

$\varphi \leq \psi$. Το σύνορο $C = \partial D$ είναι



κατά τμήματα C^1-διαφ. καμπύλη, με 4 C^1-τμήματα, που διατρέχονται από τις καμπύλες:

$r_1(t) = (t, \varphi(t))$, $t \in [a,b]$: διατρέχει την C_1 θετικά

$r_2(t) = (b, t)$, $t \in [\varphi(b), \psi(b)]$: —//— C_2 —//—

$r_3(t) = (t, \psi(t))$, $t \in [a,b]$: —//— C_3 αρνητικά(!)

$r_4(t) = (a, t)$, $t \in [\varphi(a), \psi(a)]$: —//— C_4 —//—

Παρατηρούμε ότι:

$$(1)\quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right] dx = \int_a^b \big(P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))\big)\, dx$$

Από την άλλη μεριά,

$$\int_{C^+} F\cdot dr = \int_{C_1^+} F\cdot dr + \int_{C_2^+} F\cdot dr + \int_{C_3^+} F\cdot dr + \int_{C_4^+} F\cdot dr =$$

$$= \int_{C_1^+} F\cdot dr + \int_{C_2^+} F\cdot dr - \int_{C_3^-} F\cdot dr - \int_{C_4^-} F\cdot dr$$

(βλ. σελ. 109). Έχουμε:

$$\int_{C_1^+} F\cdot dr = \int_a^b (P,0)(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt = \int_a^b (P(t,\varphi(t)),0)\cdot(1,\varphi'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b P(t,\varphi(t))\,dt.$$

$$\int_{C_2^+} F\cdot dr = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} (P,0)(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} (P(b,t),0)\cdot(0,1)\,dt =$$

$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} 0\,dt = 0.$$

$$\int_{C_3^+} F\cdot dr = -\int_{C_3^-} F\cdot dr = -\int_a^b (P,0)(r_3(t))\cdot r_3'(t)\,dt =$$

$$= -\int_a^b (P(t,\psi(t)),0)\cdot(1,\psi'(t))\,dt = -\int_a^b P(t,\psi(t))\,dt.$$

$$\int_{C_4^+} F\cdot dr = -\int_{C_4^-} F\cdot dr = -\int_{\phi(a)}^{\psi(b)} (P,0)(r_4(t))\cdot r_4'(t)\,dt =$$

$$= -\int_{\phi(a)}^{\psi(a)} (P(a,t),0)\cdot(0,1)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} 0\,dt = 0.$$

Αθροίζοντας έχουμε

$$(2)\quad \int_{C^+} F\cdot dr = \int_a^b \big(P(t,\varphi(t)) - P(t,\psi(t))\big)\,dt.$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ 2

Έστω D ένα y-απλό $\subseteq \mathbb{R}^2$, $C = \partial D$, $Q : D \to \mathbb{R}$ C^1-διαφορίσιμη και $F = (0, Q) : D \to \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\,dy$$

__Αποδ:__ Ομοια με την προηγούμενη.

ΘΕΩΡ. (Green)

Έστω D x-απλό και y-απλό, $C = \partial D$, $F = (P, Q) : D \to \mathbb{R}^2$ C^1-διαφορίσιμη. Τότε

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

__Αποδ.__ Παρατηρούμε ότι $F = (P,Q) = (P,0) + (0,Q)$ και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα λήμματα.

ΠΑΡΑΔ

(1) $F(x,y) = (x+y, y) \Rightarrow P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = y$ (C^∞-διαφ.)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ x- και y-απλό.

$r(t) = (\text{συν}t, \text{ημ}t) : t \in [0, 2\pi]$ C^∞-καμπύλη.

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_0 (\text{συν}t + \text{ημ}t, \text{ημ}t) \cdot (-\text{ημ}t, \text{συν}t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\text{ημ}^2 t\, dt = \cdots = -\pi$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (0-1)\, dx\,dy = -\iint_D 1\, dx\,dy = \left(\begin{matrix}\text{πολικές}\\ \text{μτεχ.}\end{matrix}\right)$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 1 \cdot r\, dr\right] d\theta = \cdots = -\pi.$$

<u>ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ</u> $F=(P,Q) \Rightarrow$ γράφουμε $\int_C P dx + Q dy$

για το επικαμπύλιο $\int_C F\cdot dr$

$\boxed{\text{Παραδ.}}$

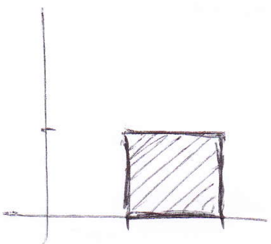
(2) Υπολογίστε χρησιμοποιώντας το Θ. Green το επικαμπύλιο

$$\int_{C^+} (x-xy)dx + (y^3+1)dy$$

όπου $C=\partial([1,2]\times[0,1])$ (x-απλό και y-απλό).

<u>Απάντ.</u>

$$\int_{C^+} \underbrace{(x-xy)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(y^3+1)}_{Q(x,y)}dy \overset{(\text{Green})}{=}$$



$$= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \iint_D (0-(-x))dxdy$$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^1 x\,dy\right]dx = \int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 3/2.$$

(3) Υπολογίστε με χρήση του Θ. Green το

$$\int_{C^+} (x^3+y^3)dx + (2y^3-x^3)dy,$$

όπου $C=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$.

<u>Απάντ.</u>

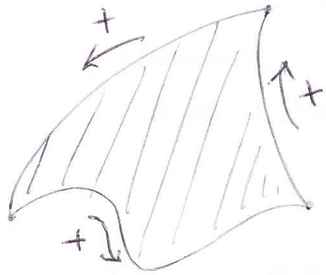
$C=\partial D$, όπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ x-απλό και y-απλό $\Rightarrow$

$$\int_{C^+} \underbrace{(x^3+y^3)}_{P}dx + \underbrace{(2y^3-x^3)}_{Q}dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

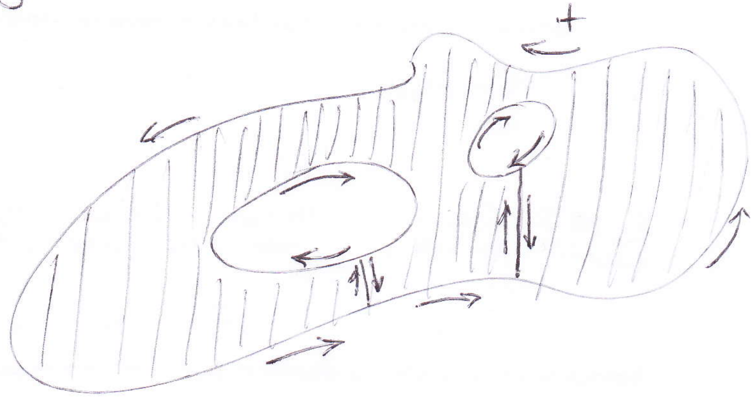
$$= \iint_D (-3x^2-3y^2)dxdy = -3\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \left(\begin{matrix}\text{πολικός}\\ \text{μτσχ.}\end{matrix}\right)$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2 r\,dr\right]d\theta = \dots = -3\frac{\pi}{2}.$$

ΟΡΣ Ένα <u>απλό σύνολο Green</u> είναι το εσωτερικό μιας (κατά τμήματα) C^1- καμπύλης Jordan. Ένα <u>στοιχειώδες σύνολο Green</u> είναι ένα φραγμένο $G \subseteq \mathbb{R}^2$ με σύνορο ∂G να είναι ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους από (κατά τμήματα) C^1- καμπύλες Jordan.



απλό Green



στοιχειώδες Green

<u>Προσοχή!</u> Διατρέχουμε θετικά ένα στοιχειώδες σύνολο Green έχοντάς το πάντα <u>αριστερά</u> μας! Η εξωτερική καμπύλη διαγράφεται θετικά (αντίθετα των δεικτών του ρολογιού) ενώ οι εσωτερικές αντίστροφα!

ΘΕΩΡΗΜΑ Το Θ. Green επεκτείνεται σε Green-απλά και σε Green-στοιχειώδη σύνολα.

Εφαρμογή

Έστω G απλό Green. Τότε το εμβαδόν του δίνεται από

$$\boxed{A(G) = \frac{1}{2}\int_{(\partial G)^+} -y\,dx + x\,dy}$$

Πράγματι:

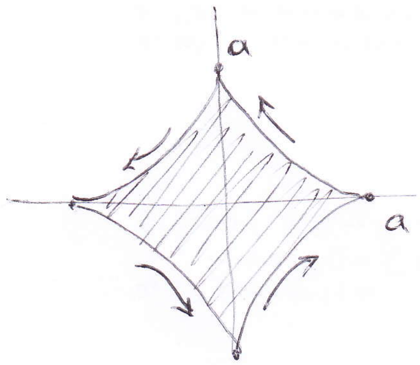
$$A(G) = \iint_G 1\,dx\,dy = \iint_G (1/2 - (-1/2))\,dx\,dy$$

Θέτω $P(x,y) = -y/2$, $Q(x,y) = x/2$, $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$, οπότε:

$$A(G)=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{(\partial G)^+}F\cdot dr=\frac{1}{2}\int_{(\partial G)^+}-ydx+xdy.$$

Άσκηση

Έστω G το εσωτερικό του αστεροειδούς που διατρέχεται από την $r(t)=(a\,συν^3t,\ a\,ημ^3t)$, $t\in[0,2\pi]$. Να βρεθεί το εμβαδόν $A(G)$.



Απάντ.

$$A(G)=\frac{1}{2}\int_{C^+}-ydx+xdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{C^+}F\cdot dr$$

όπου $F(x,y)=(-y,x)$. Άρα:

$$A(G)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}F(r(t))\cdot r'(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-a\,ημ^3t,\ a\,συν^3t)\cdot(-3a\,συν^2t\,ημt,\ 3a\,ημ^2t\,συνt)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^2ημ^4t\,συν^2t+3a^2συν^4t\,ημ^2t)\,dt=$$

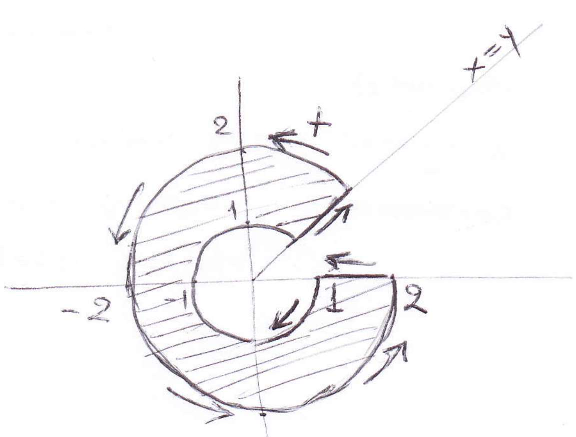
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}ημ^2t\,συν^2t\,dt=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}ημ^2 2t\,dt=\dots=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Άσκηση

Ζητείται το επικαμπύλιο

$$\int_{C^+}xdx+xydy$$

όπου C η καμπύλη του σχήματος:



Απαντ.

Το εσωτερικό της καμπύλης είναι το χωρίο G που σε πολικές συντεταγμένες περιγράφεται από:

$$G=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 :\ 1\le r\le 2,\ \ \pi/4\le\theta\le 2\pi\}.$$

Άρα

$$\int_{C^+} x\,dx + xy\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_G (y-0)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\pi/4}^{2\pi}\left[\int_1^2 r\,\text{ημ}\theta\cdot r\,dr\right]dy = \int_{\pi/4}^{2\pi}\left[\text{ημ}\theta\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_1^2\right]d\theta =$$

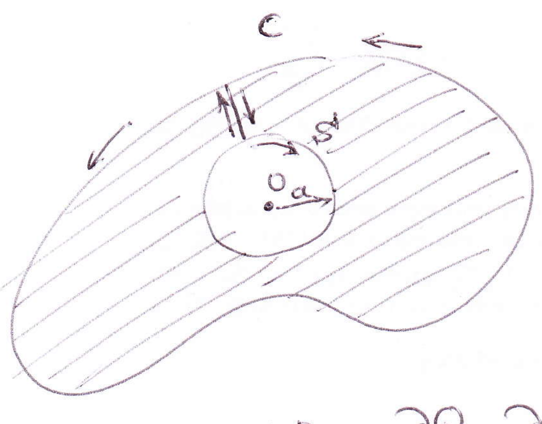
$$= \frac{7}{3}\int_{\pi/4}^{2\pi}\text{ημ}\theta\,d\theta = \frac{7}{3}\left(-\text{συν}\theta\Big|_{\pi/4}^{2\pi}\right) = \frac{7}{3}\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$

Έστω C (κατά τμήμ.) C^1- διαφ. καμπύλη Jordan με το $(0,0)$ να ανήκει στο εσωτερικό της. Νδο

$$\int_{C^+} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi.$$

Απόδ. Το εσωτερικό είναι ανοιχτό, άρα $\exists\, a>0$: $S(0,a)\subseteq$ εσωτ. της C. Συμβολίζουμε με G το χωρίο ανάμεσα στην C και τον κύκλο S' με κέντρο 0 και ακτίνα a.



Το G είναι στοιχειώδες σύνολο Green. Εξάλλου, για την δεδομένη F, είναι:

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} F\cdot dr + \int_{\underset{\text{θετικά ως προς G!}}{\underline{S^+}}} F\cdot dr = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} F\cdot dr = -\int_{S^+} F\cdot dr = \int_{S^-} F\cdot dr =$$

→ αρνητικά ως προς G άρα θετικά ως προς εσωτερικό του δίσκου

$$= \int_{\underline{S^+}} F\cdot dr =$$

↳ συνήθης θετικός προσ/σμός

$$= \int_0^{2\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} F(a\text{συν}t, a\text{ημ}t)\cdot($$

$$= \int_0^{2\pi} F(a\text{συν}t, a\text{ημ}t)\cdot(-a\text{ημ}t, a\text{συν}t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a\text{ημ}t}{a^2}, \frac{a\text{συν}t}{a^2}\right)\cdot(-a\text{ημ}t, a\text{συν}t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Όπως φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας F στο σύνορο ενός στοιχειώδους Green, είναι άθροισμα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων της F πάνω στην εξωτερική καμπύλη παραμετρημένη θετικά και πάνω στις εσωτερικές παραμετρημένες θετικά ως προς το Green, αλλά αρνητικά ως προς το δικό τους εσωτερικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN (Κάθετη Μορφή)

Εστω G ένα απλό σύνολο Green, $\partial G = C$ (κατά τμήματα) C^1-διαφορ. καμπύλη Jordan, παραμετρημένη θετικά από την $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$. Θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο (στην καμπύλη) διάνυσμα

$$n(t) = \frac{1}{\|r'(t)\|} \cdot (y'(t), -x'(t))$$

Αν $F = (P,Q) : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι C^1-διαφ. απεικόνιση, τότε

$$\int_{(\partial G)^+} F \cdot n \, ds = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\,dy$$

<u>Απόδ.</u>

Η απεικονιση $F \cdot n$ έχει πραγματικές τιμές, άρα η παράσταση στην αριστερή πλευρά της ισότητας είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους:

$$\int_{(\partial G)^+} F \cdot n \, ds = \int_a^b (F(r(t)) \cdot n(t)) \cdot \|r'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b (P(r(t)), Q(r(t)) \cdot \frac{1}{\|r'(t)\|} (y'(t), -x'(t)) \|r'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b (P(r(t)) \cdot y'(t) - Q(r(t)) \cdot x'(t)) \, dt =$$

$$= \int_a^b (-Q(r(t)), P(r(t)) \cdot r'(t) \, dt = \int_{(\partial G)^+} (-Q, P) \, ds \overset{(Green)}{=}$$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\,dy .$$

Παραδείγματα

Επαληθεύστε την κάθετη μορφή του Θ. Green για

① $F(x,y)=(x-y,x)$, $G=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$.

Αποδ.

$(\partial G)^+ = \{r(t)=(\text{συν}t, \text{ημ}t): t\in[0,2\pi]\}$.

$r'(t)=(-\text{ημ}t, \text{συν}t)$, $\|r'(t)\|=1$, $n(t)=\frac{1}{1}(\text{συν}t, -(-\text{ημ}t))\Rightarrow$

$n(t)=(\text{συν}t,\text{ημ}t)$.

$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \iint_G (1+0)\,dxdy = A(G)=\pi.$

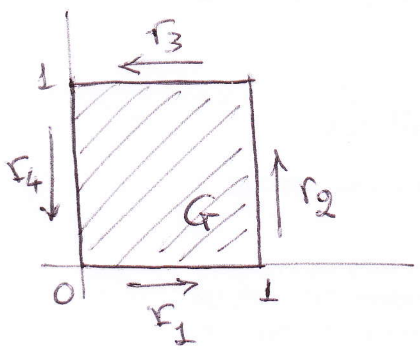
$\rightarrow \int_{(\partial G)^+} F\cdot n\, ds = \int_0^{2\pi}(F(r(t))\cdot n(t))\cdot\|r'(t)\|\,dt =$

$= \int_0^{2\pi}(\text{συν}t-\text{ημ}t, \text{συν}t)\cdot(\text{συν}t,\text{ημ}t)\cdot 1\,dt =$

$= \int_0^{2\pi}\text{συν}^2t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\text{συν}2t}{2}\,dt = \cdots = \pi.$

② $F(x,y)=(x^3+y^2, x^4)$, $G=[0,1]\times[0,1]$.

Αποδ.



Το $(\partial G)^+$ διαγράφεται από τις διαδοχικές παραμετρήσεις: για $t\in[0,1]$

$r_1(t)=(t,0)\Rightarrow r_1'(t)=(1,0)\Rightarrow$

$\Rightarrow \|r_1'(t)\|=1$ και $n_1(t)=\frac{1}{1}(0,-1)=(0,-1)$,

$r_2(t)=(1,t)\Rightarrow r_2'(t)=(0,1)\Rightarrow\|r_2'(t)\|=1$ και $n_2(t)=\frac{1}{1}(1,-0)=(1,0)$

$r_3(t)=(1-t,1)\Rightarrow r_3'(t)=(-1,0)\Rightarrow\|r_3'(t)\|=1$ και $n_3(t)=\cdots=(0,1)$

$r_4(t)=(0,1-t)\Rightarrow r_4'(t)=(0,-1)\Rightarrow\|r_4'(t)\|=1$ και $n_4(t)=\cdots=(-1,0)$

$$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (3x^2+0)dx\right]dy = \int_0^1 \left[x^3\Big|_0^1\right]dy =$$

$$= \int_0^1 1\,dy = 1.$$

$$\rightarrow \int_{(\partial G)^+} F\cdot n\,ds = \int_0^1 F(r_1(t))\cdot n_1(t)\underbrace{\|r_1'(t)\|}_{1}dt + \int_0^1 F(r_2(t))\cdot n_2(t)\cdot\underbrace{\|r_2'(t)\|}_{1}dt$$

$$+ \int_0^1 F(r_3(t))\cdot n_3(t)\cdot\underbrace{\|r_3'(t)\|}_{1}dt + \int_0^1 F(r_4(t))\cdot n_4(t)\underbrace{\|r_4'(t)\|}_{1}dt.$$

Εχουμε:

$$F(r_1(t))\cdot n_1(t) = F(t,0)\cdot(0,-1) = (t^3,t^4)\cdot(0,-1) = -t^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 -t^4 dt = -\,t^5/5\Big|_0^1 = -1/5.$$

$$F(r_2(t))\cdot n_2(t) = F(1,t)\cdot(1,0) = (1+t^2,1)\cdot(1,0) = 1+t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+t^2)dt = \left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1+1/3.$$

$$F(r_3(t))\cdot n_3(t) = F(1-t,1)\cdot(0,1) = ((1-t)^3+1,(1-t)^4)(0,1) = (1-t)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-t)^4 dt = -\frac{(1-t)^5}{5}\Big|_0^1 = 1/5$$

$$F(r_4(t))\cdot n_4(t) = F(0,1-t)\cdot(-1,0) = ((1-t)^2,0)\cdot(-1,0) = -(1-t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 -(1-t)^2 dt = \frac{(1-t)^3}{3}\Big|_0^1 = -1/3.$$

Αθροιζοντας εχουμε το ζητουμενο.

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΕΙΣ}}$

(1) Επαληθεύστε την εφαπτομενική μορφή του Θ. Green στα παραδειγματα της σελ 124.

(1α) Για $F(x,y)=(x-y,x)$, $G=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$.

$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_G (1-(-1))dxdy = 2\iint_G 1\,dxdy = 2A(G) = 2\pi.$

$\rightarrow \int_{(\partial G)^+} F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t))\cdot r'(t)dt = \int_0^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)\cdot(-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)dt =$

$= \int_0^{2\pi} (-\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t)dt = \int_0^{2\pi} 1 - \eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t\, dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\eta\mu^2 t}{2}\right)' dt =$

$= 2\pi - 0 = 2\pi.$

(1β) Για $F(x,y) = (x^3 + y^2, x^4)$, $G = [0,1]\times[0,1]$

$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[4x^3 - 2y\right]dx\right]dy = \int_0^1 \left[x^4 - 2xy\Big|_0^1\right]dy$

$= \int_0^1 (1-2y)dy = (y - y^2)\Big|_0^1 = 1 - 1 = 0.$

$\rightarrow F(r_1(t))\cdot r_1'(t) = (t^3, t^4)\cdot(1,0) = t^3 \Rightarrow \int_0^1 t^3 dt = t^4/4\Big|_0^1 = 1/4.$

$F(r_2(t))\cdot r_2'(t) = (1+t^2, 1)\cdot(0,1) = 1 \Rightarrow \int_0^1 1\,dt = 1.$

$F(r_3(t))\cdot r_3'(t) = ((1-t)^3 + 1, (1-t)^4)\cdot(-1,0) = -1-(1-t)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 (-1-(1-t)^3)dt = \dots = -5/4$

$F(r_4(t))\cdot r_4'(t) = ((1-t)^2, 0)\cdot(0,-1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 0\,dt = 0.$

Αθροίζοντας έχουμε το ζητούμενο. $\rfloor$