# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

**ΟΡΣ** Έστω $S$ παραμετρημένη επιφάνεια με παραμέτρηση $r(u,v)$, $(u,v)\in D$, και $f: S \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ονομάζουμε <u>επιφανειακό ολοκλήρωμα 1ου είδους</u> ή <u>αριθμητικό επιφανειακό ολοκλήρωμα της $f$ πάνω από την $S$</u> το

$$\iint_S f\,dS := \iint_D f(r(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv$$

αριθμ. πολ/σμός

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S 1\,dS = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv$$

είναι το <u>εμβαδόν</u> $A(S)$ της επιφάνειας $S$.

**Παραδ.** Να βρεθεί το εμβαδόν της $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=a^2\}$.

<u>Απάντ.</u>
Η $S$ (: σφαίρα με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα $a$) δέχεται την παραμέτρηση $r(\theta,\phi) := (a\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\phi,\ a\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\phi,\ a\,\text{συν}\phi)$, με $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]=D$.

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-a\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\phi,\ a\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\phi,\ 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (a\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\phi,\ a\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\phi,\ -a\,\text{ημ}\phi)$$

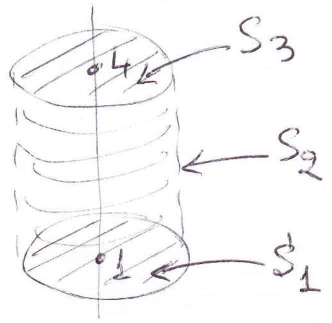
$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi} = (-a^2\text{συν}\theta\,\text{ημ}^2\phi,\ -a^2\text{ημ}^2\phi\,\text{ημ}\theta,\ -a^2\text{ημ}\phi\,\text{συν}\phi)$$

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi}\right\| = \left(a^4\underline{\text{συν}^2\theta}\,\text{ημ}^4\phi + a^4\text{ημ}^4\phi\,\underline{\text{ημ}^2\theta} + a^4\text{ημ}^2\phi\,\text{συν}^2\phi\right)^{1/2} =$$

$$= \left(a^4\text{ημ}^4\phi + a^4\text{ημ}^2\phi\,\text{συν}^2\phi\right)^{1/2} = a^2\text{ημ}\phi \geq 0.$$

$$A(S) = \iint_D \left\|\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi}\right\| d\theta\,d\phi = \int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi} a^2\text{ημ}\phi\,d\theta\right]d\phi = \cdots = 4\pi a^2.$$

$\boxed{\text{Παραδ.}}$ Να βρεθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)=z(x^2+y^2)$ πάνω στην επιφάνεια του κλειστού κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ με βάσεις $z=1$ και $z=4$.




Απαντ.

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, όπου

$S_1 = \{ r_1(u,v) = (u\,\text{συν}v,\ u\,\text{ημ}v,\ 1) : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi \}$.

$S_2 = \{ r_2(\theta,z) = (\text{συν}\theta,\ \text{ημ}\theta,\ z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 1 \le z \le 4 \}$

και $S_3 = \{ r_3(u,v) = (u\,\text{συν}v,\ u\,\text{ημ}v,\ 4) : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi \}$

Άρα
$$\iint_S f\,dS = \iint_{S_1} f\,dS + \iint_{S_2} f\,dS + \iint_{S_3} f\,dS.$$

Για την $S_1$:

$f(r_1(u,v)) = f(u\,\text{συν}v,\ u\,\text{ημ}v,\ 1) = 1\cdot(u^2\text{συν}^2v + u^2\text{ημ}^2v) = u^2.$

$\frac{\partial r_1}{\partial u} = (\text{συν}v,\ \text{ημ}v,\ 0)$

$\frac{\partial r_1}{\partial v} = (-u\,\text{ημ}v,\ u\,\text{συν}v,\ 0)$

$\frac{\partial r_1}{\partial u} \times \frac{\partial r_1}{\partial v} = (0,\ 0,\ u\,\text{συν}^2v + u\,\text{ημ}^2v) = (0,0,u) \Rightarrow$

$\left\| \frac{\partial r_1}{\partial u} \times \frac{\partial r_2}{\partial u} \right\| = |u| = u.$

$$\iint_{S_1} f\,dS = \iint_{D_1} f\circ r_1(u,v)\cdot \left\| \frac{\partial r_1}{\partial u} \times \frac{\partial r_1}{\partial v} \right\| du\,dv =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 u^2\cdot u\,du \right] dv = \int_0^{2\pi} 1/4\,dv = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \pi/2.$$

Για την $S_2$:

$f(r_2(\theta,z)) = f(\text{συν}\theta,\ \text{ημ}\theta,\ z) = z(\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta) = z.$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta} = (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta, 0)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial r_2}{\partial z} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, 0) \Rightarrow \left\| \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial r_2}{\partial z} \right\| = 1.$$

$$\iint_{S_2} f\,dS = \iint_{D_2} f \circ r_2(\theta, z) \cdot \left\| \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial r_2}{\partial z} \right\| d\theta\, dz =$$

$$= \int_1^4 \left[ \int_0^{2\pi} z \cdot 1\, d\theta \right] dz = \int_1^4 2\pi z\, dz = 2\pi \frac{z^2}{2} \Big|_1^4 = 15\pi.$$

Για την $S_3$:

$f(r_3(u,v)) = f(u\sigma\upsilon\nu v, u\eta\mu v, 4) = 4u^2.$

$$\frac{\partial r_3}{\partial u} = (\sigma\upsilon\nu v, \eta\mu v, 0)$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial v} = (-u\eta\mu v, u\sigma\upsilon\nu v, 0)$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial u} \times \frac{\partial r_3}{\partial v} = (0, 0, u) \text{ και } \left\| \frac{\partial r_3}{\partial u} \times \frac{\partial r_3}{\partial v} \right\| = |u| = u.$$

$$\iint_{S_3} f\,dS = \iint_{D_3} f(r_3(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial r_3}{\partial u} \times \frac{\partial r_3}{\partial v} \right\| du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 4u^3\, du \right] dv = 2\pi.$$

Άρα $\iint_{S} f\,dS = \pi/2 + 15\pi + 2\pi = 17\pi + \frac{\pi}{2}.$

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω $S$ παραμετρημένη επιφάνεια με παραμέτρηση $r(u,v)$, $(u,v) \in D$, και $F: S \to \mathbb{R}^3$ συνεχής. Ονομάζουμε <u>διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα</u> ή <u>επιφανειακό ολοκλήρωμα 2ου είδους της F πάνω από την S</u> το

$$\iint_{S} F \cdot dS := \iint_{D} \underbrace{F(r(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right)}_{\text{μικτό γινόμενο}} du\,dv$$

**Άσκηση**

$F(x,y,z) = (yz, x, -z^2)$.

$S = \{(x,y,z) : y = x^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 4\}$.

Να υπολογιστεί το $\iint_S F \cdot dS$.

**Απάντ.**

$S = \{ r(u,v) := (u, u^2, v) :\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 4 \}$

$F(r(u,v)) = F(u, u^2, v) = (u^2 v, u, -v^2)$

$\dfrac{\partial r}{\partial u} = (1, 2u, 0)$

$\dfrac{\partial r}{\partial v} = (0, 0, 1)$

$$F(r(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} u^2 v & u & -v^2 \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2u^3 v - u$$

$$\iint_S F \cdot dS = \int_0^1 \left[ \int_0^4 (2u^3 v - u)\, dv \right] du = \int_0^1 \left( \left(2u^3 \frac{v^2}{2} - uv\right)\Big|_0^4 \right) du$$

$$= \int_0^1 (16u^3 - 4u)\, du = \left(16 \frac{u^4}{4} - 4 \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 4 - 2 = 2.$$

Συνοψίζουμε: (1) Για να ολοκληρώσουμε πραγματική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ πάνω από καμπύλη/επιφάνεια, πολλ/ζουμε την σύνθεση $f \circ r$ ($r$: παραμέτρηση) με το μέτρο της παραγώγου ($\|r'(t)\|$ ή $\left\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right\|$).

(2) Για να ολοκληρώσουμε διανυσματική συνάρτηση $F : U \to \mathbb{R}^3$ πάνω από καμπύλη/επιφάνεια, πολ/ζουμε εσωτερικά την $F \circ r$ με την αντίστοιχη παράγωγο ($r'(t)$ ή $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$).