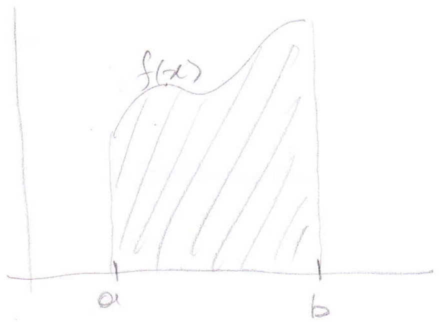
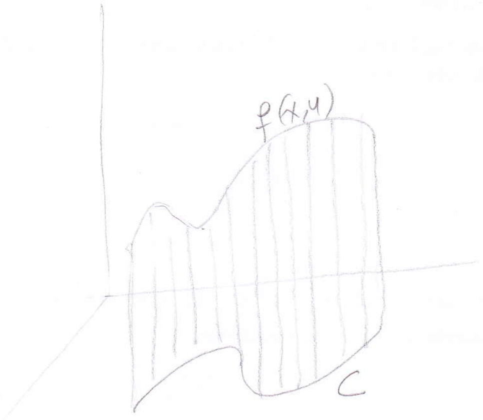
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω $r: I \to \mathbb{R}^3$ (κατά τμήματα) C^1-διαφ. καμπύλη, $C = r(I)$ η εικόνα της r, και $f: C \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ονομάζουμε <u>αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα</u> ή <u>επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους</u> <u>της</u> f <u>πάνω από την</u> C το ολοκλήρωμα

$$\int_C f\,ds := \int_I (f\circ r)(t)\cdot \|r'(t)\|\,dt.$$





Για $r(t)=t$ και $f \geq 0$, $C=[a,b]=I$, το σύνηθες ολοκλήρωμα δίνει το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου μεταξύ του άξονα των x και των τιμών (γραφ. παράστασης) της f.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που στέκεται κατακόρυφα πάνω από την C με ύψος μέχρι τις τιμές της $f \geq 0$.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα $C=[(0,0,0),(1,1,1)]$.

<u>Απάντ.</u>

Μια παραμέτρηση του C είναι η $r(t)=(t,t,t)\ :\ t\in[0,1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_C f\,ds = \int_0^1 f(r(t))\cdot\|r'(t)\|\,dt = \int_0^1 f(t,t,t)\cdot\|(1,1,1)\|\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t-3t^2+t)\cdot\sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}\int_0^1 (2t-3t^2)\,dt = \dots = \sqrt{3}\cdot 0 = 0.$$

(2) Να βρεθεί το $\int_C f\,ds$ για $f(x,y,z)=2-z$ και

$C:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ y^2+z^2=1,\ x=0,\ z\geq 0\}$.

<u>Απάντ.</u>

Μια παραμέτρηση της C είναι η $r(t)=(0,\text{συν}t,\text{ημ}t)$, $t\in[0,\pi] \Rightarrow$ ($z=\text{ημ}t\geq 0$)

$\Rightarrow r'(t)=(0,-\text{ημ}t,\text{συν}t) \Rightarrow \|r'(t)\|=1$. Άρα

$$\int_C f\,ds = \int_0^\pi f(0,\text{συν}t,\text{ημ}t)\cdot 1\,dt = \int_0^\pi (2-\text{ημ}t)\,dt = \dots = 2\pi-2.$$

(3) Ζητείται $\int_C x\,ds$, για $C=\{(x,y):\ y=x^2,\ x\in[0,1]\}$.

<u>Απάντ.</u>

$r(t)=(t,t^2)$, $t\in[0,1] \Rightarrow r'(t)=(1,2t) \Rightarrow \|r'(t)\|=(1+4t^2)^{1/2}$.

$f(x,y)=x \Rightarrow f(r(t))=f(t,t^2)=t$. Άρα

$$\int_C f\,ds = \int_0^1 f(r(t))\cdot\|r'(t)\|\,dt = \int_0^1 t\cdot(1+4t^2)^{1/2}\,dt = \dots$$

(λύση με εφαρμογή του μετασχ. $t=\frac{1}{2}\text{εφ}x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{t^2+1/4} = \dfrac{1/2}{\text{συν}x}$, $\quad dt = \dfrac{1/2}{\text{συν}^2 x}$ κτλ).

ΟΡΣ Έστω $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ μια (κατά τμήματα) C^1-διαφορ. καμπύλη, $C=r([a,b])$, $F:C\to\mathbb{R}^3$ συνεχής. Ονομάζουμε <u>διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα</u> ή <u>επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους της F πάνω από την C</u> το ολοκλήρωμα

$$\int_C F\cdot dr := \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$$

εσωτ. γινόμενο

Παραδείγματα

(1) Ζητάμε $\int_C F\cdot dr$ για $F(x,y,z)=(\eta\mu z, \sigma\upsilon\nu z, \sqrt[3]{xy})$ που $C=\{r(t)=(\sigma\upsilon\nu^3 t, \eta\mu^3 t, t):\ t\in[0,3\pi/2]\}$.

<u>Απάντ.</u>

$F(r(t))=F(\sigma\upsilon\nu^3 t, \eta\mu^3 t, t)=(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^3 t\,\eta\mu^3 t})=$

$=(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t)$.

$r'(t)=(-3\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu t,\ 3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu t,\ 1)$

$F(r(t))\cdot r'(t)=-3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu^2 t+3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t=$

$=\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t$.

$\int_C F\cdot dr=\int_0^{3\pi/2}\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t\,dt=\int_0^{3\pi/2}\left(\frac{1}{2}\eta\mu^2 t\right)'dt=$

$=\frac{1}{2}\eta\mu^2 t\Big|_0^{3\pi/2}=\frac{1}{2}$.

(2) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C F\cdot dr$ της $F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ πάνω από τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο $(0,0)$.

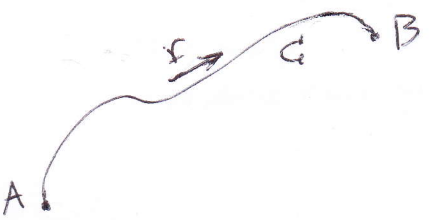
<u>Απάντ.</u>

$r(t)=(\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t)$, $t\in[0,2\pi]\Rightarrow r'(t)=(-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$.

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-\text{ημ}t, \text{συν}t)\cdot(-\text{ημ}t, \text{συν}t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

ΦΟΡΑ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ



Έστω $r: [a,b] \to C$ παραμέτρηση της καμπύλης C με $r(a)=A$ και $r(b)=B$. Η r διαγράφει την C από το A προς το B.

Τότε η $\rho: [a,b] \to C$ με $\rho(t) = a+b-t$ επίσης διαγράφει την C με $\rho(a) = r(b) = B$ και $\rho(b) = r(a) = A$, δηλ. από το B προς το A. Συμβολίζουμε με C^+ την C όταν διαγράφεται από την r, και με C^- όταν διαγράφεται από την ρ. Επηρεάζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C F\cdot dr$ από την φορά διαγραφής;

$$\int_{C^+} F\cdot dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt.$$

$$\int_{C^-} F\cdot dr = \int_a^b F(\rho(t))\cdot \rho'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b F(r(a+b-t))\cdot r'(a+b-t)(-1)\,dt \overset{*}{=}$$

$$= -\int_b^a F(r(s))\cdot r'(s)(-ds) = \int_b^a F(r(s))\cdot r'(s)\,ds =$$

$s = a+b-t$

$ds = -dt$

$s(a) = b$

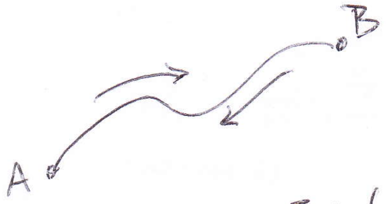
$s(b) = a$

$$= -\int_a^b F(r(s))\cdot r'(s)\,ds$$

Δηλ. η αλλαγή φοράς διαγραφής της καμπύλης αλλάζει το πρόσημο του επικαμπύλιου ολοκλ. (2ου είδους!)

[<u>Ερώτηση:</u> Τα επικαμπύλια ολοκλ. $1^{ου}$ είδους επηρεάζονται από την φορά διαγραφής της καμπύλης?]

Άρα αν διατρέξουμε μια καμπύλη C όπως στο σχήμα (1) από το A έως το B και μετά γυρίσουμε πίσω στο A το $\int_C F\cdot dr = 0$



Σχ. (1)

Σχ. (2)

Αυτό δεν συμβαίνει κατ' ανάγκη αν πάμε από το A στο B, και μετά επιστρέψουμε στο A <u>από άλλο δρόμο</u> (Σχ. (2)). Ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $F : U \to \mathbb{R}^3$ συνεχής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Για δεδομένα $A, B \in U$, το (διανυσματικό) επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F είναι ανεξάρτητο της καμπύλης που τα ενώνει.

(2) Για κάθε κλειστή καμπύλη k στο U, $\int_k F\cdot dr = 0$.

(3) $\exists$ διαφορίσιμη απεικόνιση $f : U \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $F = \nabla f$.