ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΟΡΣ Έστω $[a_k, b_k]$, $k=1,\dots,n$, διαστήματα. Το γινόμενο

$$I = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

λέγεται (κλειστό) ορθογώνιο διάστασης n. Για $n=1$, το I είναι διάστημα, για $n=2$, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, για $n=3$, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Μέτρο του I είναι ο αριθμός $\mu(I) = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n) \geq 0$. Για $n=1$, $\mu(I)$ λέγεται μήκος, για $n=2$, εμβαδόν, για $n=3$, όγκος.

ΟΡΣ. Έστω I ένα (κλειστό) ορθογώνιο διάστασης n, και, για κάθε $k=1,\dots,n$, P_k μια διαμέριση του $[a_k,b_k]$. Δηλ.

$$P_k = \{x_{k0} = a_k < x_{k1} < x_{k2} < \cdots < x_{kn_k} = b_k\}.$$

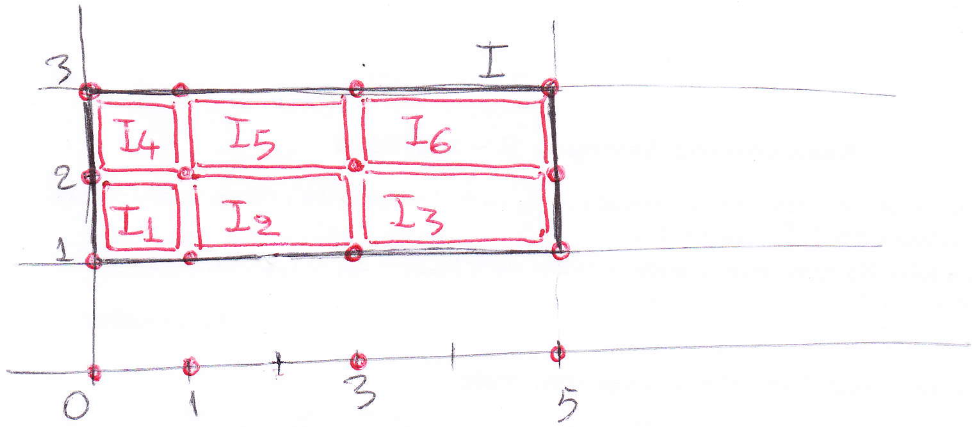
Το γινόμενο $P = P_1\times P_2\times\cdots\times P_n$ λέγεται διαμέριση του I.

Παραδ. Για $n=2$, έστω $I = [0,5]\times[1,3]$, $P_1 = \{0,1,3,5\}$, $P_2 = \{1,2,3\}$. Τότε το

$$P = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$

είναι διαμέριση του I (βλ. σχήμα, σελ. 90).

Κάθε διαμέριση χωρίζει το ορθογώνιο I σε μικρότερα ορθογώνια.



$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω P διαμέριση του I, που το χωρίζει στα μικρότερα ορθογώνια $I_1, I_2, \ldots, I_m$. Έστω και $f: I \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Θέτουμε:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}.$$

Ονομάζουμε <u>άνω άθροισμα Riemann της f ως προς P</u>, το

$$U(f,P) := \sum_{k=1}^{m} M_k \cdot \mu(I_k)$$

και <u>κάτω άθροισμα Riemann της f ως προς P</u>, το

$$L(f,P) := \sum_{k=1}^{m} m_k \cdot \mu(I_k).$$

Προφανώς, $\forall$ διαμέριση P, ισχύει

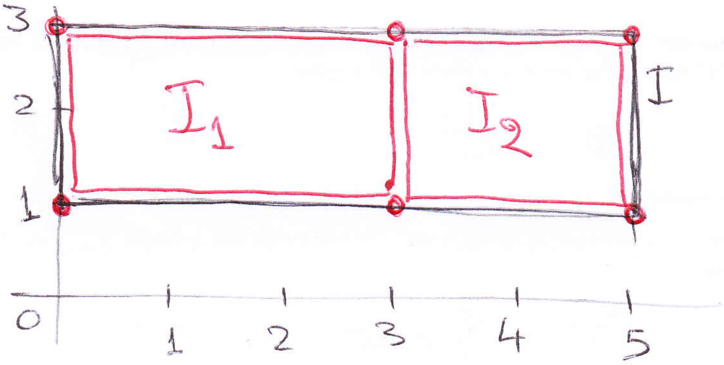
$$L(f,P) \leq U(f,P).$$

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω P_1, P_2 διαμερίσεις του I. Η P_2 λέγεται <u>εκλέπτυνση</u> της P_1, αν $P_1 \subseteq P_2$. Δηλ. η P_1 χωρίζει το αρχικό I σε $I_1, \ldots, I_m$ και η P_2 ξαναχωρίζει καθένα από τα I_k σε ακόμη μικρότερα.

Παρατηρούμε ότι αν $P_1 \subseteq P_2$, τότε

$$\circledast \qquad L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1).$$

Παράδειγμα Έστω $f(x,y)=xy$, στο $[0,5]\times[1,3]=I$, και $P_1=\{(0,1),(3,1),(5,1),(0,3),(3,3),(5,3)\}$, που χωρίζει το I στα I_1, I_2.



Τότε: $m_1=0$, $m_2=3$, $M_1=9$, $M_2=15$, και

$$L(f,P_1)=m_1\cdot\mu(I_1)+m_2\cdot\mu(I_2)=$$
$$=0\cdot[(3-0)\cdot(3-1)]+3\cdot[(5-3)\cdot(3-1)]=12.$$

$$U(f,P_1)=M_1\cdot\mu(I_1)+M_2\cdot\mu(I_2)=$$
$$=9\cdot[(3-0)\cdot(3-1)]+15\cdot[(5-3)(3-1)]=54+60=114$$

Θεωρούμε και την $P_2=P$ (της σελ. 90). Τότε:

$m_1=0$, $m_2=1$, $m_3=3$, $m_4=0$, $m_5=2$, $m_6=6$,

$M_1=2$, $M_2=6$, $M_3=10$, $M_4=3$, $M_5=9$, $M_6=15$, και

$$L(f,P_2)=m_1\cdot\mu(I_1)+\cdots+m_6\cdot\mu(I_6)=\cdots=24$$

$$U(f,P_2)=M_1\cdot\mu(I_1)+\cdots+M_6\cdot\mu(I_6)=\cdots=85,$$

και επαληθεύεται η $\circledast$.

Συμπεραίνουμε ότι αν λεπταίνουμε συνεχώς την P_1:

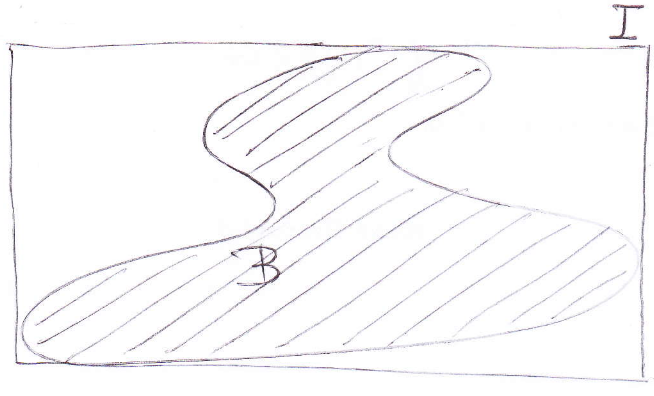
→ παίρνουμε μια αύξουσα ακολουθία κάτω αθροισμάτων $L(f,P_n)$ που φράσσεται άνω από το $U(f,P_1)$, άρα έχει κάποιο όριο που συμβ. με $\underline{\int_I} f$ και λέγεται <u>κάτω ολοκλήρωμα Riemann της f στο I</u>, και

→ παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία άνω αθροισμάτων $U(f,P_n)$ που φράσσεται κάτω από το $L(f,P_1)$, άρα έχει όριο που συμβολ. με $\overline{\int_I} f$ και λέγεται <u>άνω ολοκλήρωμα Riemann της f στο I</u>.

Αν $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ λέμε ότι η f είναι <u>Riemann ολοκληρώσιμη στο I</u> (:R-ολοκληρώσιμη). Το κοινό όριο το συμβολίζουμε $\int_I f\,d\vec{u}$ και το λέμε <u>ολοκλήρωμα (Riemann) της f στο I</u>.

Εστω τώρα $f: B \to \mathbb{R}$ όπου f φραγμένη και $B \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Τότε υπάρχει ορθογώνιο $I \subseteq \mathbb{R}^n$ με $B \subseteq I$. Ορίζουμε $g: I \to \mathbb{R}$: $g(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}); & \vec{x} \in B \\ 0; & \vec{x} \notin B. \end{cases}$

Η f λέγεται <u>Riemann ολοκληρώσιμη</u>, αν η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

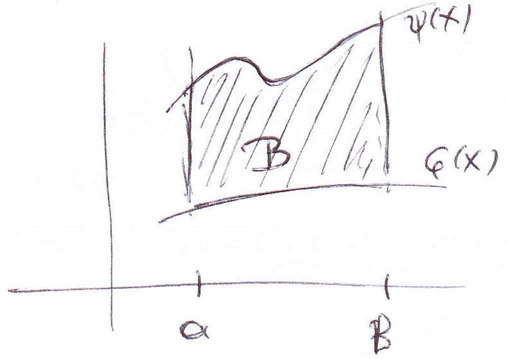


ΟΡΣ. Ένα $B \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>x-απλό</u>, αν

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(y)\}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \le b$ και $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi(x) \le \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

π.χ.:

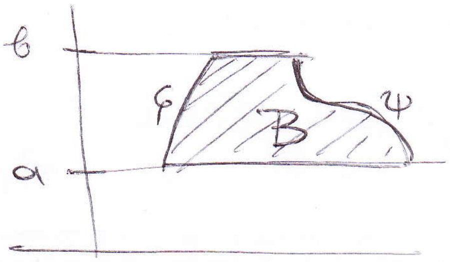


Ένα $B \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>y-απλό</u>, αν

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

όπου a, b, φ, ψ, όπως προηγουμένως.

π.χ.:



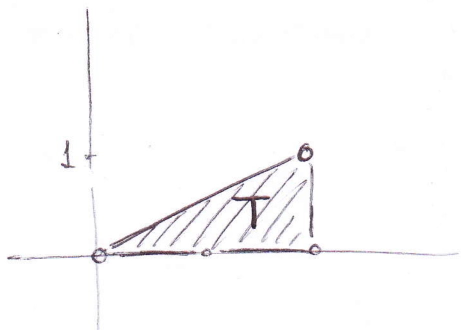
Ένα $B \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>απλό</u>, αν είναι x-απλό και y-απλό.

Παρατ. (1) κάθε ορθογώνιο είναι απλό.

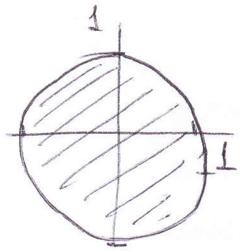
(2) Το τρίγωνο T με κορυφές $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ είναι απλό:

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \tfrac{x}{2}\} =$$

$$= \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 2y \le x \le 2\}.$$



(3) Το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου D:



$$D=\{(x,y): -1\leq x\leq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}=$$

$$=\{(x,y): -1\leq y\leq 1,\ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Ένα $B\subseteq\mathbb{R}^3$ λέγεται <u>xy-απλό</u>, αν

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y)\in D \text{ και } \omega_1(x,y)\leq z\leq \omega_2(x,y)\}$$

όπου D x-απλό και $\omega_1,\omega_2: D\to\mathbb{R}$ συνεχείς με $\omega_1\leq\omega_2$. Ανάλογα ορίζονται τα yx-απλά, xz-απλά, zy-απλά, κτπ. Ο ορισμός επεκτείνεται και σε περισσότερες συντεταγμένες.

Θεώρημα Fubini

(1) Έστω $B\subseteq\mathbb{R}^2$ x-απλό, $f: B\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο B και

$$\int_B f\,d\vec{u}=\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

(Ανάλογα, για y-απλό)

(2) Έστω $B\subseteq\mathbb{R}^3$ xy-απλό, $f: B\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι R-ολοκλ. και

$$\int_B f\,d\vec{u}=\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\underbrace{\left[\int_{\omega_1(x,y)}^{\omega_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]}_{\text{συνάρτηση των }(x,y)}dy\right]dx.$$

(Ανάλογα για yx-απλό, κτπ).

ΟΡΣ. Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$, φραγμένο. Ονομάζουμε <u>όγκο του B</u> το ολοκλήρωμα

$$V(B) := \int_B 1 \, d\vec{u}$$

(αν υπάρχει!) Για $n=1$: $V(B)=$ μήκος, $n=2$: $V(B)=$ εμβαδόν, $n \geq 3$: $V(B)$ όγκος.

Παράδ $B \subseteq \mathbb{R}^3$ xy-απλό. Τότε:

$$V(B) = \int_B 1 \, d\vec{u} \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\omega_1(x,y)}^{\omega_2(x,y)} 1 \, dz \right] dy \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\omega_2(x,y) - \omega_1(x,y)) \, dy \right] dx .$$

Αν $B =$ ορθογώνιο $= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, τότε:

$$V(B) = \int_B 1 \, d\vec{u} = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_3}^{b_3} 1 \, dz \right] dy \right] dx =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} (b_3 - a_3) \, dy \right] dx = \int_{a_1}^{b_1} \left[(b_3 - a_3) \cdot (b_2 - a_2) \right] dx$$

$$= (b_3 - a_3)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1) = \mu(B) .$$

Εφαρμογή Fubini Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφαρμόζοντας το Θ. Fubini:

(1) $f(x,y) = (e^x + x)\,\eta\mu y$, $B = [1,2] \times [0, \pi/2]$.

x-απλό και y-απλό.

B x-απλό $\Rightarrow$

$$\int_B (e^x+x)\,\eta\mu y\, d(x,y) = \int_1^2 \left[\int_0^{\pi/2} (e^x+x)\,\eta\mu y\, dy\right]dx =$$

$$= \int_1^2 \left[(e^x+x)\int_0^{\pi/2}\eta\mu y\,dy\right]dx = \int_1^2 \left[(e^x+x)\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu y\Big|_0^{\pi/2}\right)\right]dx =$$

$$= \int_1^2 (e^x+x)(-\sigma\upsilon\nu\,\pi/2 + \sigma\upsilon\nu\,0)\,dx = \int_1^2 (e^x+x)\,dx =$$

$$= \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = e^2+2-e-1/2 = e^2-e+3/2.$$

Ομοίως, B y-απλό $\Rightarrow$

$$\int_B (e^x+x)\,\eta\mu y\, d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \left[\int_1^2 (e^x+x)\,\eta\mu y\, dx\right]dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\eta\mu y\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right]dy = \int_0^{\pi/2} \left[\eta\mu y\,(e^2-e+3/2)\right]dy =$$

$$= (e^2-e+3/2)\int_0^{\pi/2}\eta\mu y\,dy = (e^2-e+3/2)\left(-\sigma\upsilon\nu y\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= (e^2-e+3/2)\cdot(-0+1) = e^2-e+3/2.$$

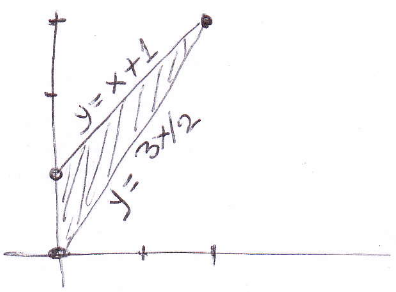
(2) $f(x,y) = x+y+1$, $\quad B = \{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\} \Rightarrow$
x-απλό

$$\int_B f\,d(x,y) = \int_0^1 \left[\int_0^{2x} (x+y+1)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(xy+y^2/2+y\right)\Big|_0^{2x}\right]dx = \int_0^1 \left[2x^2+2x^2+2x\right]dx =$$

$$= 4x^3/3 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 4/3+1 = 7/3.$$

(3) $f(x,y) = x^2+y^2$, $\quad T$ = τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$



$$= \left\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \frac{3x}{2}\le y\le x+1\right\}$$

x-απλό

$$\int_T (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int_0^2 \left[\int_{3x/2}^{x+1} (x^2+y^2)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{3x/2}^{x+1} \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[x^2(x+1) + \frac{(x+1)^3}{3} - x^2 \cdot \frac{3x}{2} - \frac{27x^3}{3\cdot 8} \right] dx = \dots = \frac{17}{6}.$$

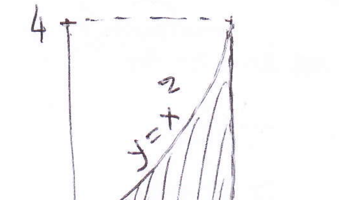
(4) Να υπολογιστεί ο όγκος του $B = \{(x,y,z) : (x,y) \in T,\ 0 \le z \le x^2+y^2\}$, όπου T το τρίγωνο της (3).

Το B είναι xy-απλό, άρα (Fubini) $\Longrightarrow$

$$V(B) = \int_B 1\,d(x,y,z) = \int_0^2 \left[\int_{3x/2}^{x+1} \left[\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz \right] dy \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\int_{3x/2}^{x+1} \left[z \Big|_0^{x^2+y^2} \right] dy \right] dx = \int_0^2 \left[\int_{3x/2}^{x+1} (x^2+y^2)\,dy \right] dx = 17/6.$$

(5) $f(x,y) = xy$, D ορίζεται από $x=2$, $y=0$, $y=x^2$



$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$

x-απλό.

$$\int_D f\,d(x,y) = \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} xy\,dy \right] dx = \int_0^2 \left[x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right] dx =$$

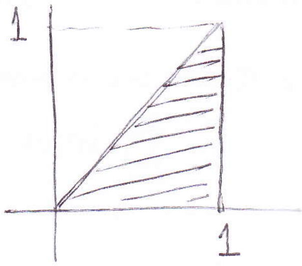
$$= \int_0^2 x^5/2\,dx = \frac{x^6}{2\cdot 6}\Big|_0^2 = \frac{2^6}{12} = 16/3.$$

(6) Ζητάμε $\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{-x^2} dx \right] dy$. Επειδή $\nexists$ στοιχειώδης συνάρτηση με παράγωγο e^{-x^2}, δοκιμάζουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης:

Παρατηρούμε ότι

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 ,\ y \le x \le 1\} \quad (y\text{-απλό})$$

$$= \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le x\} \quad (x\text{-απλό})$$



Άρα

$$\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{-x^2} dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x e^{-x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[e^{-x^2} y \Big|_0^x \right] dx =$$

$$= \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (e^{-x^2})' dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

(7) ομοίως (ίδιο D):

$$\int_0^1 \left[\int_y^1 ημx^2 dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^x ημx^2 dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 ημx^2 \cdot \left(y \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 x\, ημx^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (συνx^2)' dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(συνx^2 \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{2} (συν1 - συν0) = \frac{1}{2} (1 - συν1).$$