ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\vec{x}_0 \in A$ σταθερό, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{\alpha}\| = 1$ και $f: A \to \mathbb{R}^m$. Αφού A ανοιχτό $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$: $S(x_0, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow \forall t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$: $\vec{x}_0 + t\vec{\alpha} \in S(x_0, \varepsilon) \subseteq A$.

Θέτουμε $g(t) := \vec{x}_0 + t\vec{\alpha}$, $t \in I$. Η g είναι διαφορίσιμη με $g'(t) = \vec{\alpha}$, $\forall t \in I$. Αν η $f \circ g: I \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο 0, η $(f\circ g)'(0)$ λέγεται <u>κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $\vec{x}_0$ προς την κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$</u>, και συμβολίζεται με $(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0)$.

<u>Προσοχή</u> στη διαφορά στο συμβολισμό!

$$(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0) \quad , \quad (Df)_{\vec{x}_0}(\vec{\alpha})$$

$\vec{\alpha}$ ← κατεύθυνση, $\vec{x}_0$ ← σημείο στήριξης.

Παρατηρήσεις (1) Αν f διαφορίσιμη, τότε $f\circ g$ διαφορ. και

$$(f\circ g)'(t) = (\nabla_{g(t)} f)\cdot g'(t) = (\nabla_{g(t)} f)\cdot \vec{\alpha}.$$

Ιδιαιτέρως:

$$(D_{\vec{\alpha}} f)(x_0) = (f\circ g)'(0) = (\nabla_{\vec{x}_0} f)\cdot(\vec{\alpha}) = (Df)_{\vec{x}_0}(\vec{\alpha}).$$

(2) Αν $\vec{\alpha} = e_i$, η κατευθυνόμενη παράγωγος συμπίπτει με την μερική παράγωγο ως προς την i-μεταβλητή:

$$(D_{e_i} f)(\vec{x}_0) = (\nabla_{\vec{x}_0} f)\cdot e_i = (Df)_{\vec{x}_0}(e_i) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}_0}.$$

(3) f διαφορίσιμη $\Rightarrow$ υπάρχει κατευθυνόμενη παράγωγος προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

(4) Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μπορεί να υπάρχουν όλες οι κατευθ. παράγωγοι, χωρίς η f να είναι διαφορίσιμη, ούτε συνεχής.

$\boxed{\text{Άσκηση}}$ $f(x,y,z) = xyze^{x^2+y^2+z^2}$. Να υπολογιστεί η $D_{\vec{\alpha}} f(0,1,1)$ στην κατεύθυνση $\vec{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Απαντ. Παρατηρούμε ότι

$$\nabla_{(0,1,1)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,1,1)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,1,1)}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,1,1)} \right) =$$

$$= \Big(yze^{x^2+y^2+z^2} + 2x^2yze^{x^2+y^2+z^2},\ xze^{x^2+y^2+z^2} + 2xy^2ze^{x^2+y^2+z^2},$$

$$xye^{x^2+y^2+z^2} + 2xyz^2e^{x^2+y^2+z^2} \Big)\Big|_{(0,1,1)} =$$

$$= (e^2, 0, 0).$$

Άρα

$$(D_{\vec{\alpha}} f)(0,1,1) = \left(\nabla_{(0,1,1)} f\right) \cdot \vec{\alpha} = (e^2, 0, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^2.$$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Αν $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^3$ σταθ. και $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, η $(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x_0}) = (\nabla_{\vec{x_0}} f) \cdot \vec{\alpha}$ είναι εσωτ. γινόμενο των διανυσμάτων $\nabla_{\vec{x_0}} f$ και $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου (σελ. 8)

$(D_{\vec{a}}f)(\vec{x}_0) = \|\nabla_{\vec{x}_0} f\| \cdot \underbrace{\|\vec{a}\|}_{=1} \cdot \text{συν}\theta$, άρα $(D_{\vec{a}}f)(\vec{x}_0)$ γίνεται μέγιστη για $\text{συν}\theta = 1$, δηλ. $\theta = 0°$, και ελάχιστη για $\text{συν}\theta = -1$, δηλ. $\theta = 180°$. Επομένως έχουμε μέγιστη τιμή για $\vec{a} = \frac{\nabla_{\vec{x}_0} f}{\|\nabla_{\vec{x}_0} f\|}$ και ελάχιστη για $\vec{a} = -\frac{\nabla_{\vec{x}_0} f}{\|\nabla_{\vec{x}_0} f\|}$.

Άσκηση Έστω $f(x,y,z) = x+y^2+z^3$. Για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(0,0,0)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή; Το ίδιο για $\vec{x}_0 = (1,1,1)$.

Απάντ. $\nabla_{(x,y,z)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (1, 2y, 3z)$, άρα

$\nabla_{(0,0,0)} f = (1,0,0)$, επομένως: η $D_{\vec{a}}f(0,0,0)$ γίνεται μέγιστη για $\vec{a} = \frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|} = (1,0,0)$ και ελάχιστη για $\vec{a} = -\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|} = (-1,0,0)$.

$\nabla_{(1,1,1)} f = (1,2,3)$, επομένως μέγιστη $(D_{\vec{a}}f)(1,1,1)$ για $\vec{a} = \frac{(1,2,3)}{\|(1,2,3)\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1,2,3)$ και ελάχιστη για $\vec{a} = -\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$