

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΟΡ. $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ διαφ/μη, $a, b \in \mathbb{R}^m$. Τότε $\exists \xi$ στο ευθ. ζήτημα που ενώνει τα a, b :

$$f(b) - f(a) = (\nabla_{\xi} f) \cdot (b - a).$$

Απόδ. Τα ευθ. ζήτημα του ευθ. ζήτηματος είναι της μορφής

$$w(t) = (1-t)a + tb, \quad t \in [0, 1].$$

Επειδή w διαφ/μη, έχουμε ότι w είναι διαφορίσιμη και η

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}:$$

$$g(t) = f \circ w(t) = f((1-t)a + tb).$$

Για την g ισχύει το ΘΜΤ για μια μεταβλητή, άρα

$\exists t_0 \in (0, 1)$:

$$g(1) - g(0) = g'(t_0) \cdot (1 - 0) = g'(t_0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(b) - f(a) &= f(w(1)) - f(w(0)) = g(1) - g(0) = g'(t_0) = \\ &= (f \circ w)'(t_0) = \nabla_{w(t_0)} f \cdot w'(t_0) = \end{aligned}$$

$$= \nabla_{w(t_0)} f \cdot (b - a).$$

Άρκει επομένως να πάρουμε $\xi = w(t_0)$. ■

Σημείωση: Αν η f παίρνει διανυσματικές τιμές,

δεν ισχύει ανάλογη ιδιότητα.