ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ

Υπενθύμιση: Κάθε γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ορίζει ένα πίνακα $\overset{n\times m}{A} = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = pr_i(f(\vec{e}_j))$

$$a_{ij} = pr_i(f(\vec{e}_j)) = f_i(\vec{e}_j)$$

π.χ. η $f(x,y) = (2x, 3x+y, y-x)$ έχει συντεταγμένες $f_1(x,y) = 2x$, $f_2(x,y) = 3x+y$, $f_3(x,y) = y-x$, άρα ορίζει τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{e}_1) & f_1(\vec{e}_2) \\ f_2(\vec{e}_1) & f_2(\vec{e}_2) \\ f_3(\vec{e}_1) & f_3(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τον πίνακα A ξαναβρίσκουμε την f μέσω της

$$f(x_1, \dots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Στο παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \equiv (2x, 3x+y, y-x) = f(x,y).$$

Για $n=m=1$ κάθε γραμμική $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι της μορφής $f(x)=ax$, όπου $a=f(1)$, και για $m\geq 2$, $n=1$ κάθε γραμμική αντιστοιχεί στον πίνακα-γραμμή $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_m))$. Σε αυτή την περίπτωση

$$f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_m) = f\left(\sum x_i \vec{e}_i\right) = \sum x_i f(\vec{e}_i) =$$

$$= (f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_m)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} =$$

πολ/σμός πινάκων

$$= (f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_m)) \cdot (x_1,\dots,x_m)$$

εσωτ. γινόμενο.

Γνωρίζουμε από Ανάλυση Ι ότι $f: \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\cdot \\ x}}{I} \xrightarrow{\subseteq\mathbb{R}} \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x \iff$

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = f'(x) \in \mathbb{R} \iff$$

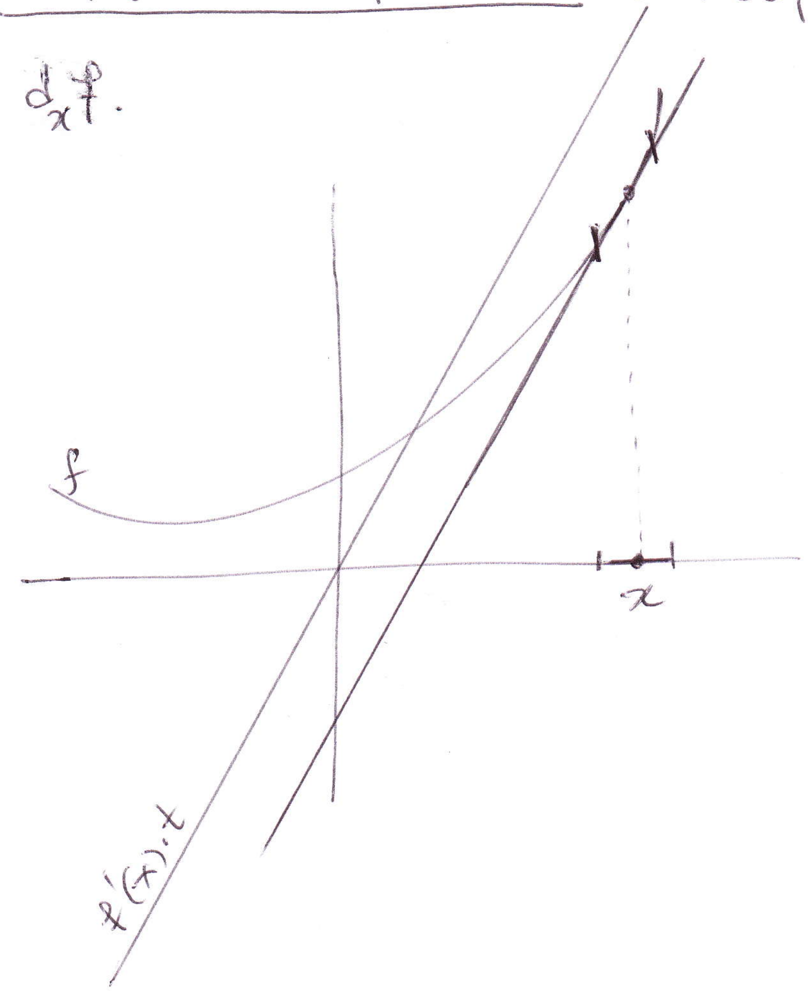
$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - f'(x) = 0 \iff$$

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)-f'(x)\cdot t}{t} = 0 \iff$$

$\exists$ γραμμική $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)-u(t)}{t} = 0.$$

Η γραμμική απεικ. $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $u(t) = f'(x) \cdot t$ λέγεται διαφορικό της f στο x και συμβολίζεται $(df)_x$ ή $d_x f$.



Το διαφορικό της f στο x είναι η γραμμική απεικόνιση που προσεγγίζει περισσότερο από όλες (τις γραμμικές) την f, κοντά στο x.

Παράγωγος και διαφορικό συνδέονται με τις σχέσεις

$$(df)_x(t) = f'(x) \cdot t$$

$$f'(x) = (df)_x(1).$$

Η τελευταία ισοδυναμία του ορισμού, μας επιτρέπει να τον επεκτείνουμε σε απεικονίσεις πολλών μεταβλητών.

ΟΡΣ $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in A$. Η f λέγεται <u>διαφορίσιμη στο $\vec{x}$</u> αν $\exists$ γραμμική $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε:

$$\exists \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - u(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

Η γραμμική u λέγεται <u>διαφορικό της f στο $\vec{x}$</u> και συμβολίζεται με $Df(\vec{x})$ ή $(Df)_{\vec{x}}$.

Η f λέγεται διαφορίσιμη, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $\vec{x} \in A$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. f διαφ. στο $\vec{x} \Rightarrow (Df)_{\vec{x}}$ μονοσήμαντα ορισ.

2. f διαφ. στο $\vec{x} \Rightarrow f$ συνεχής στο $\vec{x}$.

3. $f(\vec{x}) = \vec{c} =$ σταθ $\Rightarrow f$ διαφορίσιμη και

$$(Df)_{\vec{x}} = 0, \quad \forall \vec{x} \in A.$$

4. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ γραμμική $\Rightarrow f$ διαφορίσιμη και

$$(Df)_{\vec{x}} = f, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

Δηλ: $(Df)_{\vec{x}}(\vec{h}) = f(\vec{h}) \quad \forall \vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^m$.

(5) $f: A^{\subseteq \mathbb{R}^m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ διαφ. στο $\vec{x} \in A \iff$

κάθε συντεταγμένη $f_i : A \to \mathbb{R}$ είναι διαφ. στο $\vec{x}$

και

(*) $$Df(\vec{x}) = (Df_1(\vec{x}), Df_2(\vec{x}), \dots, Df_n(\vec{x})).$$

Στην ειδική περίπτωση $m=1$, $f_i : \underset{\subseteq \mathbb{R}}{A} \longrightarrow \mathbb{R}$,

και η (*) εφαρμοσμένη στο 1 δίνει

$$f'(x) := Df(x)(1) = (f_1'(x), \dots, f_n'(x)).$$

(6) <u>Διαφορισιμότητα σύνθεσης</u> / <u>Κανόνας αλυσίδας</u>:

$f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^m}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ διαφ. στο $\vec{x} \in A$, $f(A) \subseteq B$,

$g: B \longrightarrow \mathbb{R}^k$ διαφ. στο $\vec{y} = f(\vec{x}) \Rightarrow g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$

διαφ. στο $\vec{x}$ και

$$[D(g \circ f)]_{\vec{x}} = (Dg)_{f(\vec{x})} \circ (Df)_{\vec{x}}.$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ LEIBNIZ

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτά, οπότε $A \times B \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Εστω και $f: A \times B \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $(\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B$.

Συμβολίζουμε:

$$f_{\vec{a}} : B \longrightarrow \mathbb{R}^k : \vec{y} \longmapsto f_{\vec{a}}(\vec{y}) := f(\vec{a}, \vec{y})$$

$$f_{\vec{b}} : A \longrightarrow \mathbb{R}^k : \vec{x} \longmapsto f_{\vec{b}}(\vec{x}) := f(\vec{x}, \vec{b}).$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ Έστω $f: A\times B \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A\times B \subseteq \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$, διαφ. στο $(\vec{a},\vec{b})\in A\times B$.
Τότε οι $f_{\vec{a}}$, $f_{\vec{b}}$ είναι διαφ. στα $\vec{b}, \vec{a}$, αντίστοιχα, και

(**) $$(Df)_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{h},\vec{k}) = (Df_{\vec{b}})_{\vec{a}}(\vec{h}) + (Df_{\vec{a}})_{\vec{b}}(\vec{k})$$

για κάθε $(\vec{h},\vec{k})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ (τύπος του Leibniz).

Υπενθ: $f: \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ λέγεται διγραμμική αν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, χωριστά, δηλ.

$$f(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y}) = f(\vec{x}_1,\vec{y}) + f(\vec{x}_2,\vec{y})$$
$$f(\vec{x},\vec{y}_1+\vec{y}_2) = f(\vec{x},\vec{y}_1) + f(\vec{x},\vec{y}_2)$$
$$f(\lambda\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda\cdot f(\vec{x},\vec{y})$$

για κάθε $\vec{x},\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathbb{R}^m$, $\vec{y},\vec{y}_1,\vec{y}_2\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ } \underline{1}}$ $f: \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ διγραμμική $\Rightarrow$
f διαφ. σε κάθε $(\vec{a},\vec{b})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ και

$$(Df)_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{h},\vec{k}) = f(\vec{h},\vec{b}) + f(\vec{a},\vec{k})$$

Απόδ. (του τύπου) Από την προηγ. πρόταση, ισχύει (**).
Όμως $f_{\vec{a}}$, $f_{\vec{b}}$ γραμμικές από υπόθεση, άρα (ιδιότ. ④)

$$(Df_{\vec{b}})_{\vec{a}} = f_{\vec{b}} \quad \text{και} \quad (Df_{\vec{a}})_{\vec{b}} = f_{\vec{a}}$$

Άρα

$$(Df)_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{h},\vec{k}) = f_{\vec{b}}(\vec{h}) + f_{\vec{a}}(\vec{k}) = f(\vec{h},\vec{b}) + f(\vec{a},\vec{k}).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2 Το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο είναι διαφ. σε κάθε $(\vec{a},\vec{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ και

$$(D\,\cdot)_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{a}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{b}$$

$$(D\times)_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{a}\times\vec{y} + \vec{x}\times\vec{b}, \qquad \forall\, \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3 $f,g : \overset{\subseteq \mathbb{R}^m}{A} \to \mathbb{R}$ διαφ. στο $x \Rightarrow f\cdot g$ διαφ. στο $\vec{x}$ και

$$[D(f\cdot g)]_{\vec{x}}(\vec{h}) = f(\vec{x})\cdot(Dg)_{\vec{x}}(\vec{h}) + g(\vec{x})\cdot(Df)_{\vec{x}}(\vec{h}).$$

<u>Απόδ.</u> Παρατηρούμε ότι $(f\cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x})\cdot g(\vec{x}) = \gamma(f(\vec{x}), g(\vec{x})) = \gamma\circ(f,g)(\vec{x})$, όπου $\gamma : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι το σύνηθες γινόμενο, που είναι διγραμμική. Άρα

$$[D(fg)]_{\vec{x}}(\vec{h}) = [D(\gamma\circ(f,g))]_{\vec{x}}(\vec{h}) =$$

$$= (D\gamma)_{(f(\vec{x}),g(\vec{x}))} \circ \left((Df)_{\vec{x}}, (Dg)_{\vec{x}}\right)(\vec{h}) =$$

$$= (D\gamma)_{(f(\vec{x}),g(\vec{x}))}\left((Df)_{\vec{x}}(\vec{h}), (Dg)_{\vec{x}}(\vec{h})\right) =$$

$$= \gamma\left(f(\vec{x}), (Dg)_{\vec{x}}(\vec{h})\right) + \gamma\left((Df)_{\vec{x}}(\vec{h}), g(\vec{x})\right) =$$

$$= f(\vec{x})\cdot(Dg)_{\vec{x}}(\vec{h}) + g(\vec{x})\cdot(Df)_{\vec{x}}(\vec{h}).$$