# Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε το σύνηθες εσωτ. γινόμενο και την συνήθη νόρμα του $\mathbb{R}^n$!

**ΟΡΣ.** Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Ονομάζουμε <u>ανοιχτή σφαίρα</u> (ή <u>μπάλλα</u>) <u>με κέντρο</u> $\vec{x}_0$ <u>και ακτίνα</u> $\varepsilon$ το σύνολο

$$S(\vec{x}_0, \varepsilon) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}.$$

Ονομάζουμε <u>κλειστή σφαίρα</u> (ή <u>μπάλλα</u>) <u>με κέντρο</u> $\vec{x}_0$ <u>και ακτίνα</u> $\varepsilon$ το σύνολο

$$\hat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon\}.$$

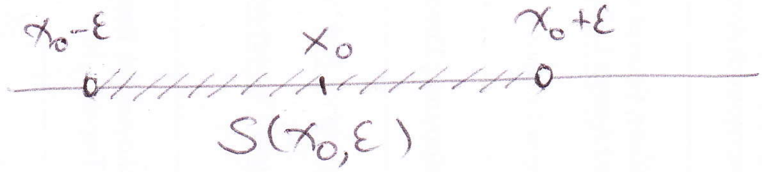
**Παραδ.**

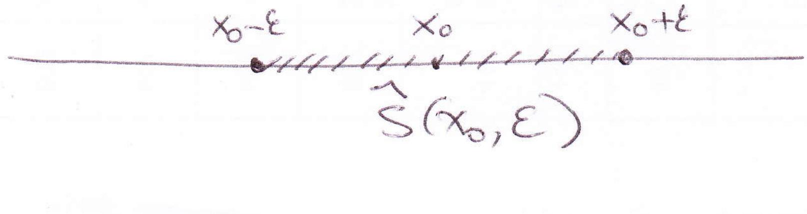
(1) $n = 1 \quad \| \ \| = | \ |$.

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} =$$

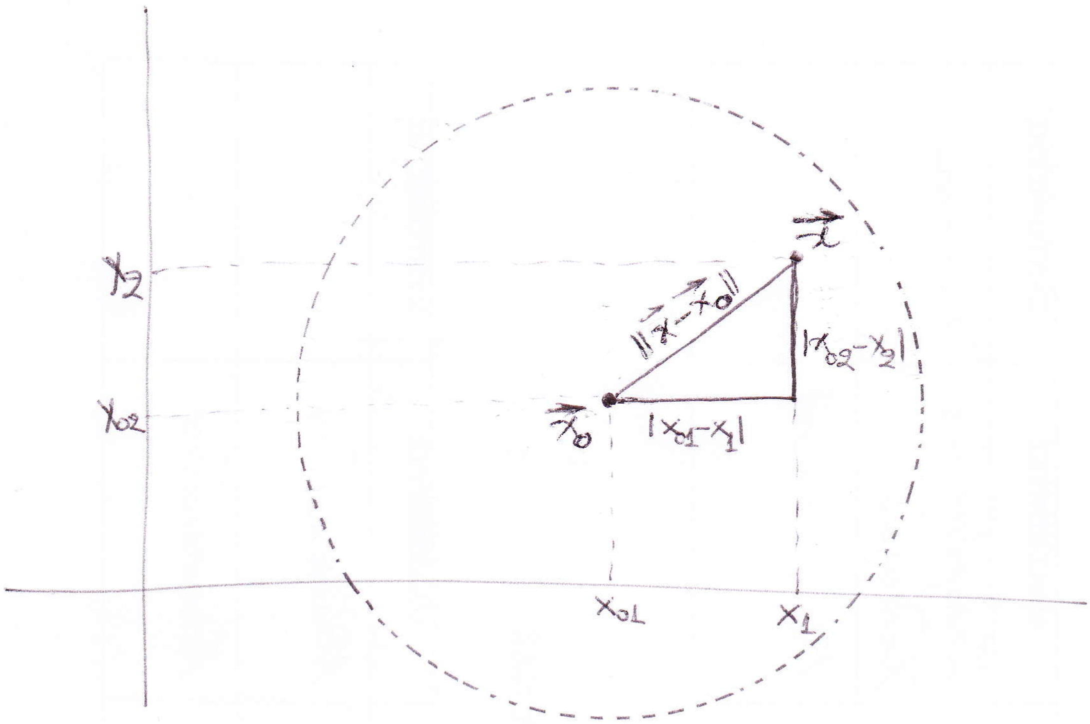
$$= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

$$\hat{S}(x_0, \varepsilon) = \cdots = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$



(2) $n=2$ $\vec{x}_0=(x_{01},x_{02})$




$$S(\vec{x}_0,\varepsilon)=\{\vec{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\varepsilon\}=$$

$$=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2}<\varepsilon\}=$$

= εσωτερικό του κύκλου με κέντρο $\vec{x}_0=(x_{01},x_{02})$ και ακτίνα $\varepsilon$.

Ενώ

$$\hat{S}(\vec{x}_0,\varepsilon)=\{\ \cdots\cdots\ \leq\varepsilon\}=$$

= εσωτερικό + περιφέρεια του ίδιου κύκλου.

**ΟΡΣ.** Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>ανοιχτό</u> αν:

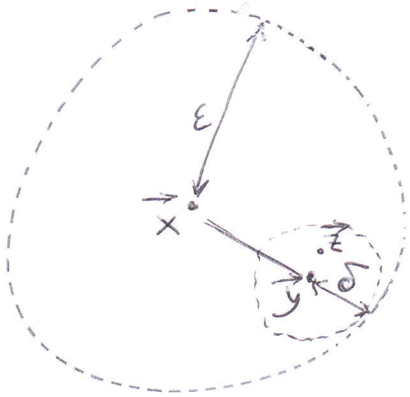
$\forall \vec{y} \in A \ \exists \delta > 0 : \ S(\vec{y}, \delta) \subseteq A$.

Ένα $B \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>κλειστό</u> αν $B^c$ είναι ανοιχτό.

**Παραδ.**

(1) Οι ανοιχτές σφαίρες είναι ανοιχτά σύνολα:

Έστω η $S(\vec{x}, \varepsilon)$. Έστω και $\vec{y} \in S(\vec{x}, \varepsilon) \Rightarrow$




$\Rightarrow \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon \Rightarrow \delta := \varepsilon - \|\vec{x} - \vec{y}\| > 0$. Τότε $S(\vec{y}, \delta) \subseteq S(\vec{x}, \varepsilon)$.

Πράγματι,

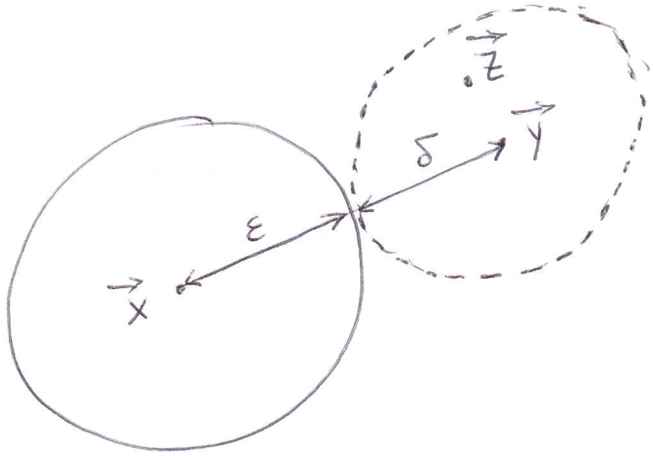
$\vec{z} \in S(\vec{y}, \delta) \Rightarrow \|\vec{y} - \vec{z}\| < \delta \Rightarrow$

$\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| < \|\vec{x} - \vec{y}\| + \delta = \varepsilon \Rightarrow \vec{z} \in S(\vec{x}, \varepsilon)$.

(2) Οι κλειστές σφαίρες είναι κλειστά σύνολα:

Έστω η $\hat{S}(\vec{x}, \varepsilon)$. ΘΔο $(\hat{S}(\vec{x}, \varepsilon))^c$ ανοιχτό. Έστω

$\vec{y} \in (\hat{S}(\vec{x}, \varepsilon))^c \Rightarrow$




$\Rightarrow \|\vec{x}-\vec{y}\| > \varepsilon \Rightarrow \delta := \|\vec{x}-\vec{y}\| - \varepsilon > 0$. Τότε

$S(\vec{y},\delta) \subseteq \left(\hat{S}(\vec{x},\varepsilon)\right)^c$. Πράγματι:

$\vec{z} \in S(\vec{y},\delta) \Rightarrow \|\vec{z}-\vec{y}\| < \delta \Rightarrow$

$\|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\| \geq \|\vec{x}-\vec{y}\| \Rightarrow$

$\|\vec{x}-\vec{z}\| \geq \|\vec{x}-\vec{y}\| - \|\vec{z}-\vec{y}\| > \|\vec{x}-\vec{y}\| - \delta = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{z} \notin \hat{S}(\vec{x},\varepsilon) \Rightarrow \vec{z} \in \left(\hat{S}(\vec{x},\varepsilon)\right)^c$.

(3) Τα ανοιχτά $n$-ορθογώνια

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$

είναι ανοιχτά σύνολα και τα κλειστά

$n$-ορθογώνια

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ είναι

κλειστά σύνολα. (Αποδ: άσκηση).

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u> Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοιχτά, ούτε κλειστά. Π.χ. το $(0,1]$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>φραγμένο</u> $\Leftrightarrow$

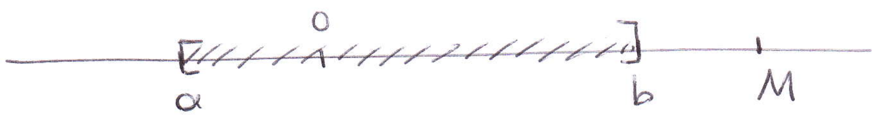
$\exists M > 0 : \ \|\vec{x}\| \leq M \ , \ \forall \vec{x} \in A \quad \Leftrightarrow$

$A \subseteq \hat{S}(\vec{0}, M)$.

Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>συμπαγές</u> $\Leftrightarrow$ είναι κλειστό και φραγμένο.

<u>Παραδ.</u>

(1) Το κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι κλειστό και φραγμένο (για $M > \max\{|a|, |b|\}$), άρα συμπαγές.



(2) Το ανοιχτό διάστημα $(a,b)$ είναι φραγμένο, αλλά δεν είναι κλειστό, άρα ούτε συμπαγές.

(3) Οι κλειστές σφαίρες και τα κλειστά $n$-ορθογώνια είναι συμπαγή.

(4) $[0, +\infty)$ κλειστό αλλά όχι φραγμένο $\Rightarrow$ όχι συμπαγές.

(5) $\mathbb{N}$ κλειστό, αφού $\mathbb{N}^c$ είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων, αλλά όχι φραγμένο, άρα και όχι συμπαγές.

**ΟΡΣ** $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>σημείο συσσώρευσης</u> (σ.σ.) του $A \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (S(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \vec{a} \in A : \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Το σύνολο των σ.σ. του $A$ συμβολίζεται $A'$.

(2) $\vec{x}_0 \in A$ λέγεται <u>μεμονωμένο σημείο</u> του $A$ αν δεν είναι σ.σ. $\iff$

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad (S(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}) \cap A = \emptyset \iff$$

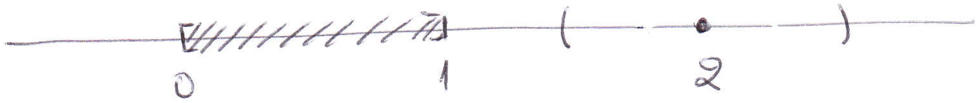
$$\exists \varepsilon > 0 : \quad S(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A = \{\vec{x}_0\}.$$

**Παραδ.**

(1) $[0,1]' = (0,1)' = [0,1)' = (0,1]' = [0,1]$.

(2) $[0,+\infty)' = [0,+\infty)$

(3) $A = [0,1] \cup \{2\} \Rightarrow A' = [0,1]$




$S(2, 1/2) \cap A = \{2\} \Rightarrow 2$ μεμονωμένο σημείο.

(4) [Υπενθ: $\forall\, x<y \in \mathbb{R}$ $\exists$ ρητός $p \in \mathbb{Q}$: $x<p<y$ και

$\exists$ άρρητος $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $x<\alpha<y$]

$\mathbb{Q}$ <u>δεν είναι ανοιχτό</u> $\subseteq \mathbb{R}$.

Πράγματι, $\forall\, q \in \mathbb{Q}$, $\forall\, \varepsilon>0$, $\underbrace{S(q,\varepsilon)}_{=(q-\varepsilon,\, q+\varepsilon)} \not\subseteq \mathbb{Q}$,

διότι μεταξύ των

$q-\varepsilon$, $q+\varepsilon$ $\exists$ άρρητος.

Επίσης $\mathbb{Q}$ <u>δεν είναι κλειστό</u>, γιατί $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ δεν είναι

ανοιχτό: $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall\, \varepsilon>0$, $\underbrace{S(\alpha,\varepsilon)}_{=(\alpha-\varepsilon,\, \alpha+\varepsilon)} \not\subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

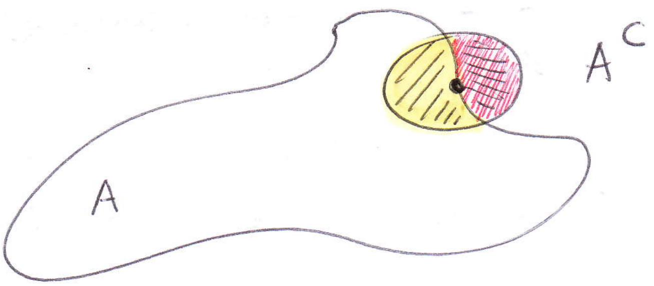
διότι μεταξύ των $\alpha-\varepsilon$, $\alpha+\varepsilon$ $\exists$ ρητός.

Είναι <u>$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$</u>.

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ <u>Σύνορο</u> ενός $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται το σύνολο

$$\partial A = \mathrm{bd}A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon>0 \;\; S(\vec{x},\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$$

$$\underline{\text{και}} \;\; S(\vec{x},\varepsilon)\cap(\mathbb{R}^n\setminus A) \neq \emptyset\}.$$



## Παραδείγματα

(1) $\partial((0,1)) = \partial([0,1]) = \{0,1\}$.


(2) $\partial((0,+\infty)) = \{0\}$

(4) $\partial\mathbb{R} = \emptyset$

(5) $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Η επόμενη Πρόταση-κριτήριο μας βοηθά να διαπιστώσουμε αν ενα σύνολο είναι κλειστό:

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) $A$ κλειστό

(ii) $A' \subseteq A$

(iii) $\partial A \subseteq A$.

<u>Ασκηση</u> $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Να βρεθούν τα $A'$, $\partial A$. Είναι το $A$ ανοιχτό; κλειστό; φραγμένο; συμπαγές;