ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ, τμ. Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ιούνιος 2012 (5 Ιουλίου).

Θ1 Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με μερικές παραγώγους κάθε τάξης και πολυώνυμο Taylor 3ου βαθμού $T(x,y)=x^3-12xy+8y^3$ στο σημείο $(2,1)$.

i) Να ευρεθεί το διαφορικό $df(2,1)$ $\boxed{1}$

ii) Εξετάστε αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $(2,1)$ και το είδος αυτού. $\boxed{1,5}$

Θ2 i) Εάν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, $\vec{T}(r,\theta)$ πολικός μετασχηματισμός και $\varphi=f\circ\vec{T}$, αποδείξτε ότι ισχύει: $\|\nabla f\|^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2$ $\boxed{1}$

ii) Να ευρεθεί συνάρτηση $V(x,y)$, ώστε το δ.π. $\vec{F}(x,y)=\left(e^{-y}\eta\mu x,\, V(x,y)\right)$ να είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2$ και να υπολογισθεί το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ η καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. $\boxed{1,5}$

Θ3 Εάν $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2-z}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $B_h=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le h\}$ και $B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\}$, να υπολογισθεί το $\iiint_B f\,dx\,dy\,dz=:\lim_{h\to+\infty}\iiint_{B_h} f\,dx\,dy\,dz$. $\boxed{2,5}$

Θ4 Έστω η $\vec{F}(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=\|\vec{r}\|$ με $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

i) Να υπολογισθούν ο στροβιλισμός και η απόκλιση του δ.π. $\vec{F}$ $\boxed{0,5}$

ii) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\Gamma=\{(x,y,0):\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1\}$ $(\alpha,\beta>0)$. $\boxed{0,5}$

iii) Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, όπου $S:\{(x,y,z):\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1\}$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$ $\boxed{1,5}$

Καλή Επιτυχία

05/07/2012 Ενδεικτικές λύσεις

Θ1/ Από τον ορισμό του πολυωνύμου Taylor, η συνάρτηση f έχει ίδια τιμή και μερικές παραγώγους με το πολυώνυμο Taylor T στο $(2,1)$.

i) $\frac{\partial T}{\partial x}(x,y)=3x^2-12y \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(2,1)=3\cdot 2^2-12=0$. Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=0$

$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y)=-12x+24y^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y}(2,1)=-12\cdot 2+24\cdot 1=0$. Άρα $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=0$

Η f είναι διαφορίσιμη (ως C^1) άρα $df(2,1)(h_1,h_2)=0h_1+0h_2=0$, $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$.

ii) Το $(2,1)$ είναι κρίσιμο σημείο της f, επειδή $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$.

Ο πίνακας Hessian της f είναι

$$H(2,1)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(2,1)=6x\Big|_{(2,1)}=12>0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1)=-12=\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}(2,1),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(2,1)=48.$$

Η ορίζουσα του $H(2,1)$ είναι $\begin{vmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{vmatrix}=12\cdot 48-12\cdot 12=12\cdot 36>0$.

Άρα: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=12>0$ και $\begin{vmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{vmatrix}>0$.

Το σημείο $(2,1)$ είναι σημείο <u>τοπικού ελαχίστου της f</u>

Θ1, 14/01/2012 / Σεπτ' 2011

Θ1 i) Ανάλογο με Θ5 i) / 1η Πρόοδος 9 Απριλίου 2011

ii) Ανάλογο με Θ4 ii)-iii) / 2η Πρόοδος 30 Ιουνίου 2011.

Θ2/ i) $\vec{T}(r,\theta)=(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$
$=(x(r,\theta), y(r,\theta))$

$$\begin{tikzcd} (r,\theta) \arrow[r, "\vec{T}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (x,y) \arrow[d, "f"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\eta\mu\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(r\sigma\upsilon\nu\theta)$$

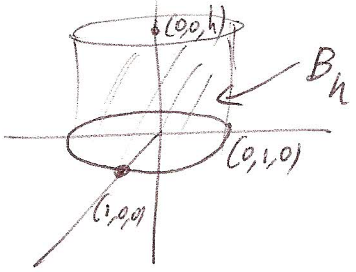
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\eta\mu^2\theta+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\eta\mu^2\theta-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma\upsilon\nu^2\theta=$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=$$
$$=\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\|^2=\|\nabla f\|^2 \quad \left(\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \|(\alpha,\beta)\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

ii) Το π.ο. της $\vec{F}$ είναι το $\mathbb{R}^2$ = απλά συνεκτικό. / $\vec{F}=(u,v)$
Άρα $\vec{F}$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \vec{F}$ αστρόβιλο $\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$.
Πρέπει $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(\eta\mu x\, e^{-y})$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\eta\mu x\, e^{-y}$. Άρα
$v(x,y)=\int -\eta\mu x\, e^{-y}\,dx=\sigma\upsilon\nu x\, e^{-y}\ (+c)$.
Τελικά $\vec{F}(x,y)=(\eta\mu x\, e^{-y}, \sigma\upsilon\nu x\, e^{-y}(+c))$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ είναι συντηρητικό.

Η καμπύλη $\Gamma: x^{2/3}+y^{2/3}=1$ είναι απλή, κλειστή, άρα
$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$. ($\vec{F}$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \exists f: \vec{F}=\nabla f \Leftrightarrow \oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$, K = κλειστή καμπύλη
$\Leftrightarrow \int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\Gamma_1\ \Gamma_2$ καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με ίδια αρχή και πέρας)

Θ2 i) Θ3 i) 1η Πρόοδος, 9 Απριλίου 2011 / Θ2 ii) 14/03/2012 (Σεπτ 2011)
ii) 6) − Σεπτ. 2011

Θ3



Χρησιμοποιούμε κυλινδρικό μετασχηματισμό

$\vec{T}(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{T}^{-1}(B_h)=\{(r,\theta,z) : 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le h\}$

$0\le x^2+y^2=r^2\le 1$

$$I_h=\int_0^h\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} r\ e^{+r^2-z}\, d\theta\right) dr\, dz = 2\pi\left[\int_0^h e^{-z}\int_0^1 r e^{r^2} dr\, dz\right]$$

ορίζουσα μετασχ

$$=2\pi\int_0^h e^{-z}\left(\frac{e^{r^2}}{2}\Big|_0^1\right)dz=\frac{2\pi}{2}\int_0^h e^{-z}(e-1)\,dz=\pi(e-1)\left(-e^{-z}\Big|_0^h\right)=$$

$$=\pi(e-1)(1-e^{-h})$$

Το $\iiint_B e^{x^2+y^2-z}\,dx\,dy\,dz=\lim_{h\to+\infty} I_h=\pi(e-1)\lim_{h\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^h}\right)=\pi(e-1)$

$\left(\lim_{h\to+\infty} e^h=+\infty\right)$

$\underline{\theta 4}$ i) $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=(P,Q,R)_{(x,y,z)}$

$(x,y,z)\neq(0,0,0)$

i) $\operatorname{curl}\vec{F}(x,y,z)=\left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}\right|_{(x,y,z)} =$

$=\left(\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\frac{3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\frac{3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\frac{3yx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)$

$\underline{=}\ 0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=(0,0,0)$

$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(x,y,z)$

$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

$\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3z^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}=0.$

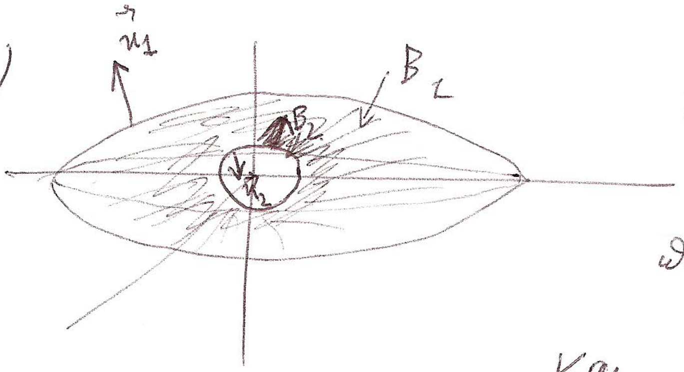
---

ii) Το $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ είναι απλά συνεκτικό.

$\vec{F}$ αστρόβιλο $\Leftrightarrow \vec{F}$ συντηρητικό.

Άρα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$, Γ = απλή+κλειστή $\subseteq \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

iii)



Έστω $B_1=\{(x,y,z): (\frac{x}{\alpha})^2+(\frac{y}{\beta})^2+(\frac{z}{\gamma})^2\le 1\}$ που έχει επιφάνεια την S

Και $B_2=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le \varepsilon^2\}$ ώστε $B_2 \subseteq$ εσωτ. B_1 (π.χ. $0<\varepsilon<\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$) με επιφάνεια S_2.

Από το Θ. Gauss $\displaystyle\iiint_{B_1\cap B_2^c} div\vec F\, dx\,dy\,dz = \iint_S \vec F\cdot d\vec S - \iint_{S_2}\vec F\cdot d\vec S$

Από το i) ισχύει $div\vec F(x,y,z)=0$, $(x,y,z)\in B_1\cap B_2^c \subseteq \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

Άρα $\displaystyle\iint_S \vec F\cdot d\vec S = \iint_{S_2}\vec F\cdot d\vec S$ (1)

Υπολογίζουμε το $\displaystyle\iint_{S_2}\vec F\cdot d\vec S$. $\vec F(\vec r)=\frac{\vec r}{r^3}$, S_2: επιφ. σφαίρας ακτίνας ε

$d\vec S = \frac{\vec r}{r}\, dS$ ($\frac{\vec r}{r}$ = μον. κάθετο στην S_2)

Άρα $\displaystyle\iint_{S_2}\vec F\cdot d\vec S = \iint_{S_2}\frac{\vec r}{r^3}\cdot\frac{\vec r}{r}\, dS = \iint_{S_2}\frac{r^2}{r^4}\, dS \overset{r=\varepsilon}{=} \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_2} dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{\text{εμβαδόν επιφ. σφαίρας ακτίνας } \varepsilon} = 4\pi$ (2)

Άρα, $\displaystyle\oiint_S \vec F\cdot d\vec S = 4\pi$ (από (1)+(2))

Θ4, Ιούνιος 2011.