ΜΑΘΗΜΑ 34 (27-05)

▸ Εφαρμογή του Θ. Gauss για ασυμπίεστα διανυσματικά πεδία $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

δηλαδή η απαίτηση $div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ στο $(x,y,z)\in A$, A ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^3$

Η $\vec{F}$ είναι C^1 και δεν ορίζεται στο $(\alpha,\beta,\gamma)\in \partial A$.

Έστω B σύνολο που εφαρμόζεται το Θ. Gauss, $B\subseteq A$

Τότε $\oiint_{(\partial B)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \begin{cases} 0, & (\alpha,\beta,\gamma)\in B \\ c, & (\alpha,\beta,\gamma)\in \varepsilon\sigma B \end{cases}$ Το c ΔΕΝ εξαρτάται από το B

Θα το δούμε μέσω γνωστών παραδειγμάτων διανυσμ. πεδίων. Η απόδειξη γίνεται για το τυχαίο ασυμπίεστο δ.π. τελείως ανάλογα.

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r}=(x,y,z), \quad r=\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vec{r}=(x,y,z)\neq(0,0,0) \quad (\alpha\neq 0)}$$

π.χ. $\vec{F}(\vec{r}) = -GM\frac{\vec{r}}{r^3}$ πεδίο βαρύτητας της Γης

$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}}{r^3}$ Ηλ. πεδίο Coulomb

(Καλύτερα Σχήματα : Μάθημα 34)

Θα μελετήσουμε το $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

i) Αποδείξτε ότι το $\vec{F}$ είναι ασυμπίεστο, $div\vec{F}=0$

ii) Υπολογίστε το $I_1 = \oiint_{(\partial B)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$ όταν $(0,0,0)\notin B$

iii) Υπολογίστε το $I_2 = \oiint_{(\partial B)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$, όταν $(0,0,0)\in \varepsilon\sigma B$.

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

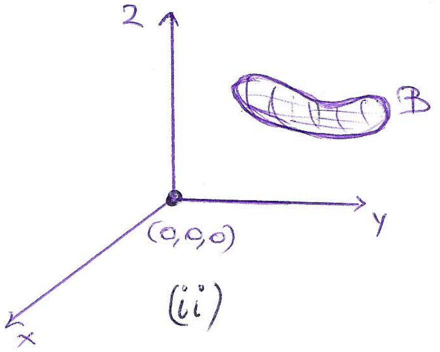
$(x,y,z) \neq (0,0,0)$

I

i) $$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \text{ (όμοια)}$$

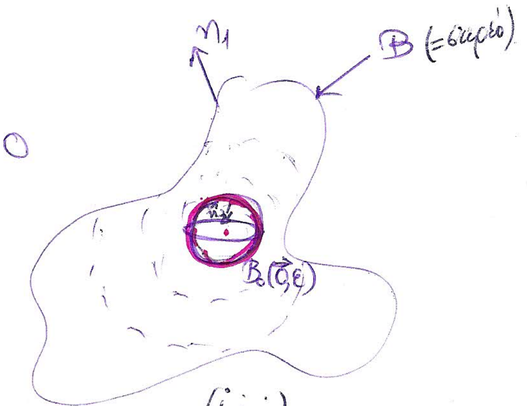
$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

ii)



(ii)

$$I_1 = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = 0$$



(iii)

Άρα, για τυχαία κλ. επιφάνεια S που $\boxed{\text{δεν}}$ περιέχει το $(0,0,0)$ στο εσωτερικό της η εξερχόμενη ροή δια μέσου της S είναι $I_1 = 0$

iii) $B_0(\vec{0},\varepsilon) \subseteq$ εσ.B

Εφ. το Θ. Gauss $B \cap B_0^c$

$$\iint_{(\partial B)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{(\partial B_0)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{B\cap B_0^c} \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$I_2 = \int_{(\partial B)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{(\partial B_0)^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{(\partial B_0)^+} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\,dS = \iint_{(\partial B_0)^+} \frac{r^2}{r^4}\,dS \overset{r=\varepsilon \text{ στο } (\partial B)}{=} \iint_{(\partial B_0)^+} \frac{1}{\varepsilon^2}\,dS =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(4\pi\varepsilon^2\right)$$

$I_2 = 4\pi$ Άρα, για τυχαία κλειστή επιφάνεια S που περιέχει το $(0,0,0)$ στο εσωτ. της η εξερχόμενη ροή δια μέσου της S είναι $I_2 = 4\pi$.

Συντηρητικά, Αστρόβιλα, Ασυμπίεστα δ.π.

Σχέση αυτών

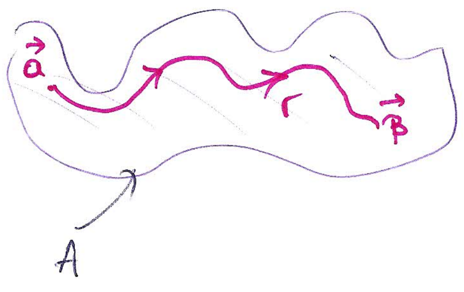
$A \subseteq \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$) ανοιχτό

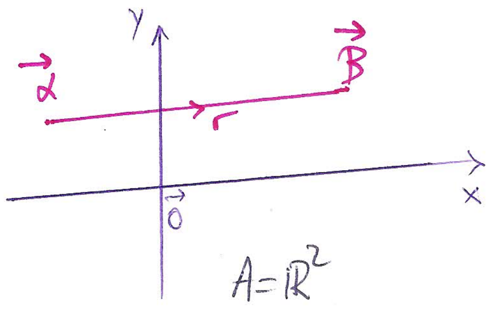
Ορισμοί

1) A συνεκτικό $\Leftrightarrow$ για κάθε ζεύγος σημείων $\vec{a}, \vec{\beta} \in A$, υπάρχει καμπύλη Γ C^1 λεία, απλή, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\vec{r}(\alpha) = \vec{a}$, $\vec{r}(\beta) = \vec{\beta}$)
(κ.τ) (κ.τ)

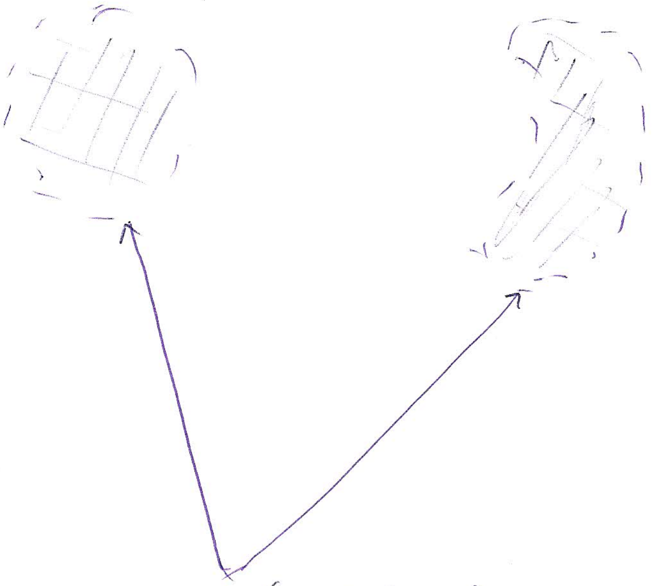
(Γ είναι στο A με αρχή το $\vec{a}$, πέρας το $\vec{\beta}$)

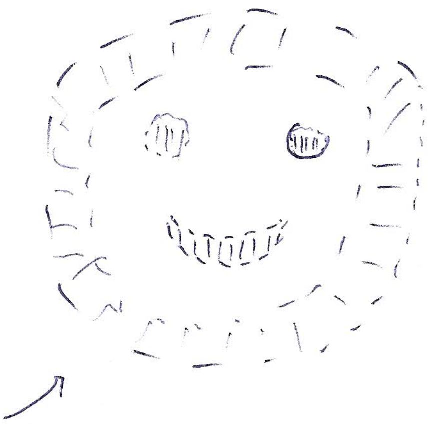
(δηλαδή το A αποτελείται από $\underline{1}$ κομμάτι)





A: Συνεκτικά σύνολα





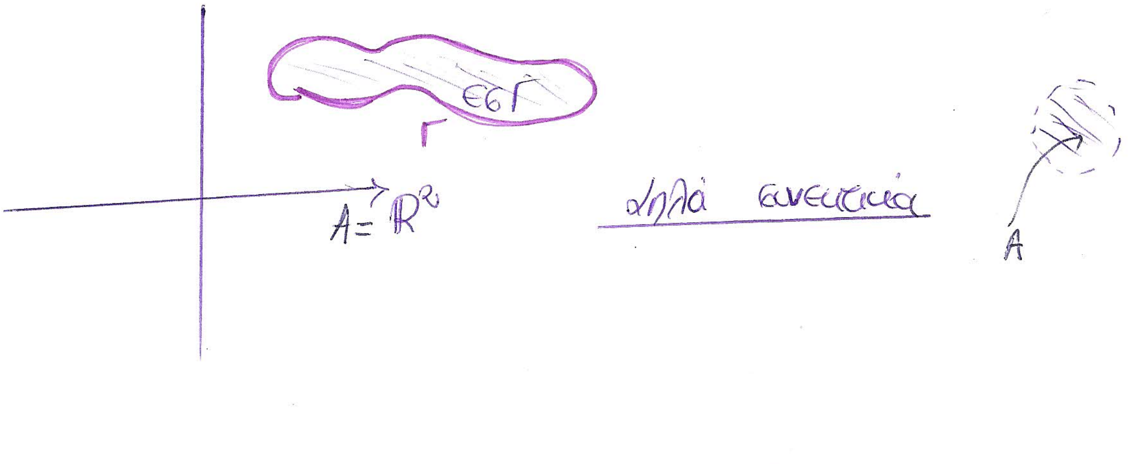
A: $\boxed{\text{Μη}}$ συνεκτικό σύνολο

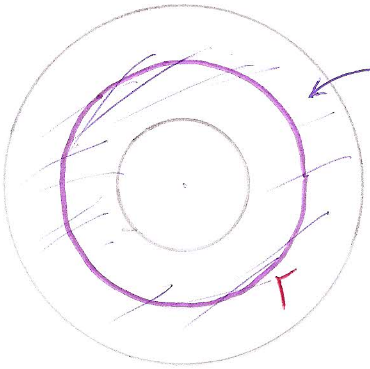
↦ έστω A συνεκτικό (Θα αναφερόμαστε μόνον σε συνεκτικά + ανοικτά σύνολα)

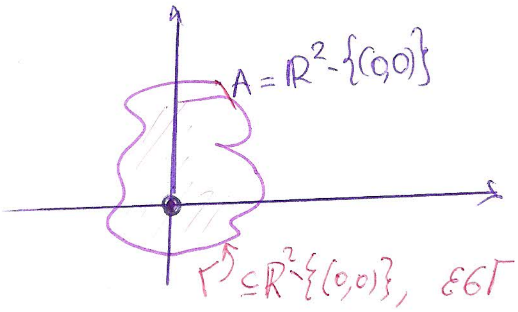
2) A απλά συνεκτικό ⇔ κάθε απλή, κλειστή, C^1 (κ.τ), λεία (α.τ) καμπύλη του A μπορεί να συρρικνωθεί με συνεχή τρόπο στο σημείο του A.

Ισχύουν τα εξής (θεωρώ βοηθητικά)

i) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό ⇔ για κάθε απλή, κλειστή, C^1 (κ.τ), λεία (κ.τ). Γ καμπύλη του A έχουμε ότι $\varepsilon\sigma\Gamma \subseteq A$.





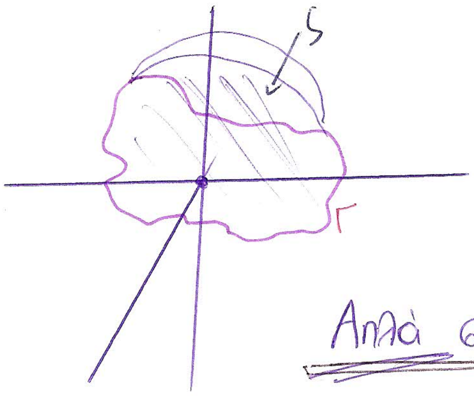


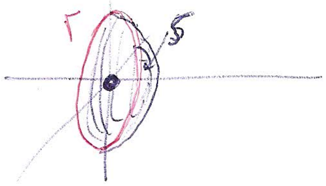
$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varepsilon\sigma\Gamma \not\subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

<u>Όχι απλά συνεκτικό στο $\mathbb{R}^2$</u> (σύνολα με οπές)

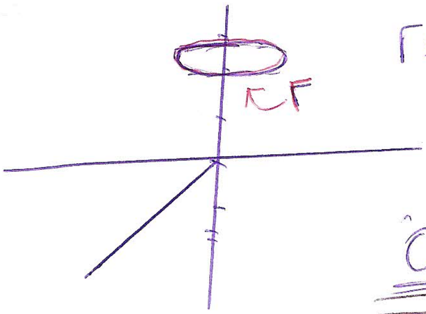
ii) $A \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>απλά συνεκτικό</u> $\Leftrightarrow$ Για κάθε καμπύλη Γ του A απλή, κλειστή, C^1 (κε), λεία (κε) υπάρχει επιφάνεια <u>$S \subseteq A$</u> ώστε η Γ να είναι το σύνορο της S (σύνορο επιφάνειας)

$A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

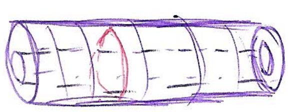




<u>Απλά συνεκτικό στο $\mathbb{R}^3$</u>



$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$



Σωλήνας

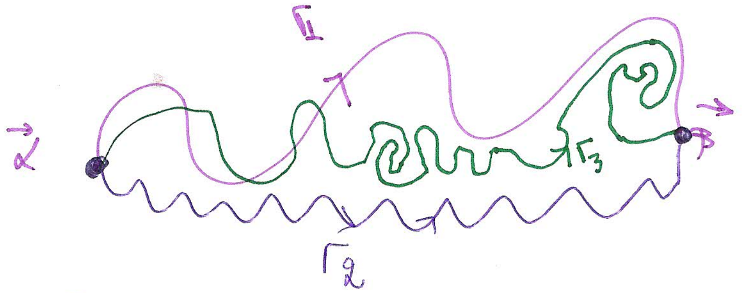
<u>Όχι απλά συνεκτικό στον $\mathbb{R}^3$.</u>

Συντηρητικό δ.π. ***

$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$), $A \subseteq \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$) αν+ συνεκτικό, $\vec{F}$ συνεχής

$\vec{F}$ λέγεται συντηρητικό δ.π. όταν $\forall$ ζεύγος $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ στο A και $\forall \Gamma$ καμπύλη του A με αρχή το $\vec{\alpha}$, πέρας το $\vec{\beta}$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής } \Gamma.$$



$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dots$$

Θεώρημα!! ***

$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$), A = ανοιχτό + συνεκτικό, $\vec{F}$ C^1. Τ.Ε.Ε.Ι
$\vec{F} = (P, Q, R)$

i) F συντηρητικό στο A

ii) $\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ για κάθε απλή + κλειστή, C^1, λεία $K \subseteq A$

iii) $\exists f : A \to \mathbb{R}$: $\vec{F} = \nabla f$. ($\vec{F} \overset{\delta.\pi.}{=}$ κλίσεων)

ισοδ. $\exists f : A \to \mathbb{R}$: $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$ στο A.

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι εάν μας δοθεί κάποιο διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ δεν μπορούμε να ελέγξουμε με απλό τρόπο, αν αυτό είναι συντηρητικό ή όχι. Τα i)(ii)) μας αναγκάζουν να ελέγξουμε όλα τα ζεύγη σημείων $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in A$ και όλες τις καμπύλες που τα ενώνουν! Είναι χρήσιμα για να εντοπίσουμε τα μη συντηρητικά δ.π. Δηλαδή αν για κάποιο $\vec{F}$ δ.π βρούμε κλειστή "καλή" καμπύλη K του A με $\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$ τότε το $\vec{F}$ ΔΕΝ είναι συντηρητικό.

ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΥΚΟΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ελέγχου της συντηρητικότητας ενός δ.π. $\vec{F}$;;;

Θεώρημα!!

***

$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$), A = ανοιχτό + συνεκτικό, $\vec{F}$ C^2

i) Εάν το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό $\Rightarrow$ $\vec{F}$ αστρόβιλο ($\nabla \times \vec{F} = 0$)

Το αντίστροφο δεν ισχύει (γενικά)

π.χ. $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Τότε $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, ενώ $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, $\Gamma: \vec{r}(t) = (\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu t, \alpha\eta\mu t)$, $t \in [0, 2\pi]$

* * * * * * *

* Αστρόβιλο, όχι συντηρητικό !!! (Βλ. Μάθημα 30, Λύση + Σχήματα)

* * * * * * *

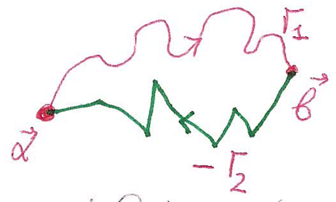
ii) A = <u>απλά συνεκτικό</u>

$\vec{F}$ αστρόβιλο $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$ συντηρητικό

Παράρτημα (<u>όχι</u> για εξετάσεις, <u>ναι</u> για τους ενδιαφερόμενους)

<u>Θεώρημα σελ. 279</u> : Σχετικά με την απόδειξη των ισοδυναμιών i), ii), iii)

i)$\Leftrightarrow$ii) : Εύκολο



$K=\Gamma_1\cup(-\Gamma_2)$, $\oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

i)$\Rightarrow$iii) : Αυτό αφήνουμε για τους μαθηματικούς.

iii)$\Rightarrow$i) : Πολύ ωραίο!

<u>Απόδ.</u> : $\vec{F}=\nabla f$ στο A. Έστω $\vec{\alpha},\vec{b}\in A$ και $\Gamma: \vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,b]$ (καλή καμπ.) με $\vec{r}(\alpha)=\vec{\alpha}$ και $\vec{r}(b)=\vec{b}$

$t\in[\alpha,b]$, $\vec{F}(\vec{r}(t))=\nabla f(\vec{r}(t))$, $\Rightarrow \nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)=\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)$ (1)

Όμως $\dfrac{d(f\circ\vec{r})(t)}{dt}=\nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)$ (2) (Κανόνας Αλ. παραγώγισης)

Τελικά : $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \int_\alpha^b (f\circ\vec{r})'(t)\,dt \overset{Θ.Θ.Α.Λ}{=} f(\vec{b})-f(\vec{\alpha})$

δηλ. το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ <u>ΔΕΝ</u> εξαρτάται από την Γ μόνον από τα $\vec{\alpha},\vec{b}$!!

Εάν $\vec{F}=\nabla f$ (ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟ) τότε $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=f(\vec{b})-f(\vec{\alpha})$

για τυχαία "καλή" καμπύλη

(Εάν $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τότε το F είναι "πεδίο" κλίσεων $\Leftrightarrow \exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $F=f'$)

Θεώρημα σελ. 280 (αυτό είναι εύκολο :->)

i) $\vec{F}$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \exists f: \vec{F}=\nabla f$ στο A $\Leftrightarrow P=\frac{\partial f}{\partial x}, Q=\frac{\partial f}{\partial y}, R=\frac{\partial f}{\partial z}$ στο A.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\overset{*}{=}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ (* Θεώρημα μικτών παραγώγων/Clairaut)

Όμοια $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$.

Ο στροβιλισμός $\nabla\times\vec{F}(=\text{rot}\vec{F})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(0,0,0)$ στο A.

ii) A = απλά συνεκτικό / $\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$ στο A.

- $A\subseteq\mathbb{R}^2$, K = κλειστή "καλή" καμπύλη του A. $\vec{F}=(P,Q)$
  Το A = απλά συνεκτικό $\Rightarrow \varepsilon\sigma K\subseteq A$. Τότε το $G=K\cup\varepsilon\sigma K\subseteq A$, άρα εφαρμόζεται το Θ. Green,
  $$\oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\ \underset{(\text{υπόθεση})}{\overset{\nabla\times\vec{F}=\vec{0}}{=}}\ 0.$$ Άρα (Θ. σελ. 279) το $\vec{F}$ = συντηρητικό.
- $A\subseteq\mathbb{R}^3$, K κλειστή "καλή" καμπύλη του A.
  Το A = απλά συνεκτικό $\Rightarrow \exists$ S επιφάνεια στο A με σύνορο επιφάνειας την K, άρα εφαρμόζεται το Θ. Stokes,
  $$\oint_K \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS\ \underset{(\text{υπόθεση})}{\overset{\nabla\times\vec{F}=\vec{0}}{=}}\ 0.$$ Άρα (Θ. σελ. 279) το $\vec{F}$ = συντηρητικό.