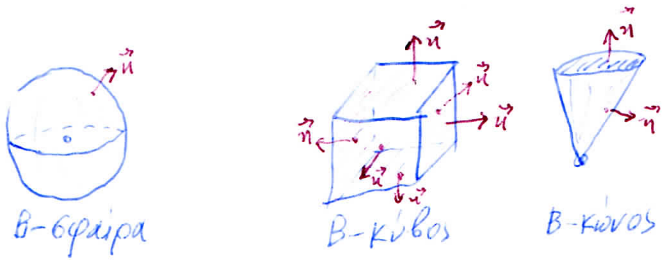
Θεώρημα Απόκλισης του Gauss (- Green)

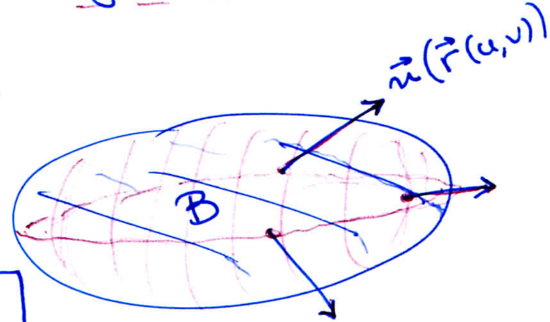
$\vec{F}=(P,Q,R): A(\subseteq \mathbb{R}^3)\to \mathbb{R}^3$, $A=$ ανοικτό σύνολο, $\vec{F}$ είναι C^1

Έστω $B\subseteq A$, B απλό σύνολο (xy-απλό, yx-απλό, ..., απλό) που το σύνορό του $(\partial B)=S$ είναι επιφάνεια κλειστή, λεία (κ.τ.)

$$S=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in D\}\quad (D\subseteq \mathbb{R}^2 \text{ απλό})$$

$$\vec{n}(\vec{r}(u,v))=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u,v)}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u,v)\|}$$ = το μοναδιαίο κάθετο στο $\vec{r}(u,v)\in S$, που βλέπει στο εξωτερικό του B.





Τότε
$$\boxed{\iint_{(\partial B)^+}(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS=\iiint_B(\operatorname{div}\vec{F})\,dx\,dy\,dz}\,,$$

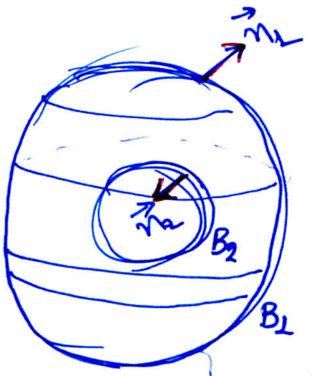
$dS=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$, $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$

(απόκλιση της $\vec{F}$ στο $(x,y,z)\in A$)

τι σημαίνει αυτό; ότι η εξερχόμενη ροή δια μέσου του ∂B = ολοκλ. της απόκλισης στο B

Σημείωση: Το Θ. Gauss ισχύει για γενικότερα σύνολα.

Π.χ. B_1, B_2 απλά, $B_2 \subseteq \varepsilon\sigma B_1$



$B = \{(x,y,z) : (x,y,z) \in B_1,\ (x,y,z) \notin \varepsilon\sigma B_2\}$

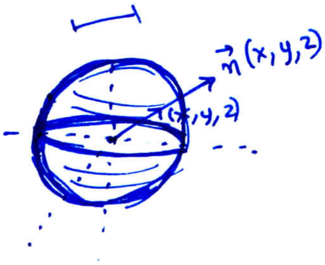
$\rightarrow B = \{(x,y,z) : \alpha^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2\}$ $(b > \alpha > 0)$

Ασκήσεις:

1) Θεωρούμε $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ \alpha > 0\}$

i) Να υπολογιστεί η εξερχόμενη ροή του $\vec{F}$ δια μέσου της επιφανείας $(\partial B)^+$

ii) Να επαληθευτεί το αποτέλεσμα με το Θ. Gauss.



i) $I = \iiint_B (\operatorname{div}\vec{F})\,dxdydz = 3\iiint_B 1\,dxdydz = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$

όγκος $V(B) = \frac{4}{3}\pi\alpha$

ii) $J = \oiint_{(\partial B)^+} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS \overset{*}{=} a \oiint_{(\partial B)^+} dS = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$

* $(x,y,z) \in (\partial B)^+$, $x^2+y^2+z^2 = a^2$

$$F(x,y,z)\cdot\vec{n} = (x,y,z)\cdot\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = \frac{a^2}{a} = \alpha$$

τελικά $\boxed{I = J}$

(*) 2) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, e^z)$, $B = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le \alpha^2, \quad 0 \le z \le \beta\}$ $(\alpha, \beta >$

i) να υπολογιστεί η ροή (εξερχόμενη) του F δια μέσου της επιφανείας $(\partial B)^+$ του B.

ii) να επαληθευτεί το αποτέλεσμα με το Θ. Gauss.

i) $I = \iiint_B (\operatorname{div}\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \iiint_B (3x^2+3y^2+e^z)\,dx\,dy\,dz =$

$x = r\cdot\cos\theta$
$y = r\cdot\sin\theta$
$z = z$

$$= \int_0^{\beta}\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\alpha}(3r^2+e^z)r\,dr\right)d\theta\right]dz = \frac{3\pi}{2}\alpha^4\beta + \pi\alpha^2(e^{\beta}-1$$

ii) $\partial B = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S_1 = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le \alpha^2, \ z=0\}$

$S_2 = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le \alpha^2, \ z=\beta\}$

$S_3 = \{(x,y,z): x^2+y^2 = \alpha^2, \quad 0<z<\beta\}$

$$J = \oiint (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_{S_1}(\vec{F}\cdot\vec{n}_1)\,dS + \iint_{S_2}(\vec{F}\cdot\vec{n}_2)\,dS + \iint_{S_3}(\vec{F}\cdot\vec{n}_3)\,dS$$

$$I_1 = \iint_{S_1}(\vec{F}\cdot\vec{n}_1)\,dS = \iint_{S_1} -e^0\,dS = \iint_{S_1} -1\,dS = -\pi\alpha^2$$

Εμβαδόν κυκλ. δίσκου ακτίνας $\alpha = \pi\alpha^2$.

$n_1 = (0,0,-1)$

$\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}_1 = -e^z$
$(x,y,z) \in S, \ z=0$

$\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = -e^0 = -1$

$$I_2 = \iint (\vec{F}\cdot\vec{n}_2)\,dS \quad , \quad \vec{n}_2 = (0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n} = e^{z} \\ (x,y,z)\in S_2 \;, z=\beta \end{array}\right\} \; \vec{F}\cdot\vec{n}_2 = e^{\beta}$$

$$I_2 = e^{\beta}\iint_{S_2} dS = e^{\beta}(\pi a^2)$$

$$I_3 = \iint_{S_3} \vec{F}(\vec{r}(\theta,z))\cdot\vec{n}_3(\vec{r}(\theta,z))\,dS$$

$$S_3 : \vec{r}(\theta,z) = (a\,\sigma\upsilon\nu\theta,\; a\,\eta\mu\theta,\; z)$$

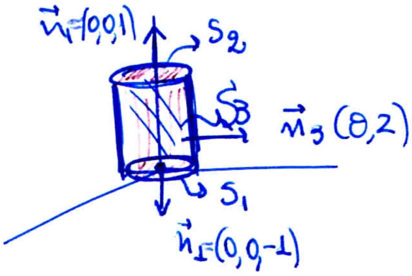
$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (a\,\sigma\upsilon\nu\theta, a\,\eta\mu\theta, 0)$$

$$(\theta,z)\in[0,2\pi]\times(0,\beta)$$

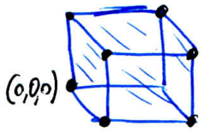
$$\vec{F}(a\,\sigma\upsilon\nu\theta, a\,\eta\mu\theta, z)\cdot(a\,\sigma\upsilon\nu\theta, a\,\eta\mu\theta, 0) = a^4\sigma\upsilon\nu^4\theta + a^4\eta\mu^4\theta$$

__άρα__ $I_3 = \displaystyle\int_0^{\beta}\int_0^{2\pi}(a^4\sigma\upsilon\nu^4\theta + a^4\eta\mu^4\theta)\,d\theta\,dz = \dots = \frac{3\pi}{2}a^4\beta$

$$I = -\pi a^2 + \pi a^2\beta + \frac{3\pi}{2}a^4\beta$$



3) Εξερχόμενη ροή $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ δια μέσου της επιφάνειας του $B = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$



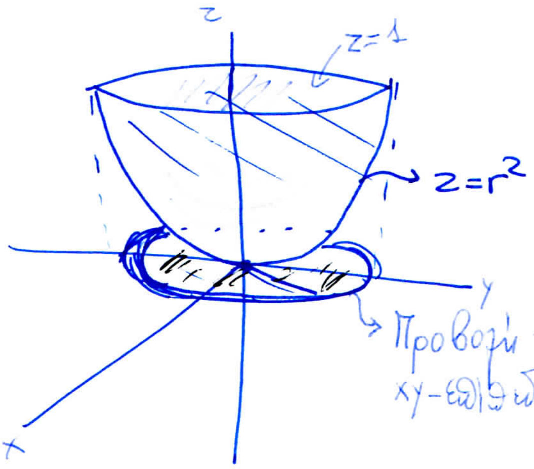
$$I = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y+z+x)\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2}$$

4) Εξερχόμενη ροή $\vec{F}(x,y,z) = (3x, 2y, 0)$ και $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 9\}$

$$J = \iiint_B 5\,dx\,dy\,dz = 5\cdot\left(\frac{4}{3}\pi 3^3\right) = 180\pi$$

5) Εξερχόμενη ροή $\vec{F}(x,y,z) = (y, x, z^2)$ δια μέσου της επιφάνειας του B, που το B φράσσεται από το $z = x^2+y^2$ και το επίπεδο $z=1$.

$$I = \iiint_B (2z)\,dx\,dy\,dz \xlongequal[\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z}]{} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 (2z)\, r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}$$



Προβολή του B στο xy-επίπεδο: $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$

6) $\vec{F}(x,y,z) = (-x^2-4xy, -6yz, 12z)$ ***

$B_{(a,\beta)} = [0,a]\times[0,\beta]\times[0,1] \quad (\alpha,\beta>0)$

Να ευρεθούν τα a_0, β_0, ώστε η εξερχόμενη ροή του F δια μέσου της επιφάνειας του $B=[0,a_0]\times[0,\beta_0]\times[0,1]$ να γίνει ΜΕΓΙΣΤΗ;

$$f(a,\beta) = \int_0^1\int_0^\beta\int_0^a (-2x-4y-6z+12)\,dx\,dy\,dz = -a^2\beta - 2a\beta^2 + 9a\beta, \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

Κρίσιμα σημεία:

$\frac{\partial f}{\partial a}(\alpha,\beta)=0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}(a,b)=0$ $\quad (\alpha, b\neq 0)$

$a_0=3$,
$\beta_0 = 3/2$

$$H(a_0,\beta_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial\beta} & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}_{(3,3/2)}$$, έχει ορίζουσα στο $(3,\frac{3}{2})$:

$$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 36-9>0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(3,3/2) = -6<0$$

Το σημείο $(3, 3/2)$ είναι μέγιστο

δηλ. $f(3,\frac{3}{2}) \geq f(\alpha,b)$ για $(\alpha,b)\in\mathbb{R}^2$

Ταυτότητες του Green στο $\mathbb{R}^3$

$B \subseteq \mathbb{R}^3$, απλό σύνολο (βλ. Gauss)

$f, g : B \to \mathbb{R}$, C^2

1) $$\oiint_{(\partial B)} (f\nabla g)\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_B (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dx\,dy\,dz$$, 1η Ταυτ. Green

[Υπόδειξη: Θ. Gauss για $\vec{F} = f\nabla g$]

2) $$\oiint_{(\partial B)^+} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_B (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dx\,dy\,dz$$, 2η Ταυτ. Green

[Υπόδειξη: $f \leftrightarrow g$ στην 1) αφαιρούμε]

3) $\nabla^2 f = 0$ στο B (αρμονική στο B)

και $f(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in \partial B$

Τότε $f(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in B$

[Υπόδειξη: Στην 1) βάζουμε $f=g$: $0 = \iiint_B (0 + \|\nabla f\|^2)\,dx\,dy\,dz$

$\Rightarrow \nabla f = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = c \\ \text{στο } B \end{array} \right\}$, $f(x,y,z)=0$ στο ∂B, άρα $f(x,y,z)=0$ στο B]