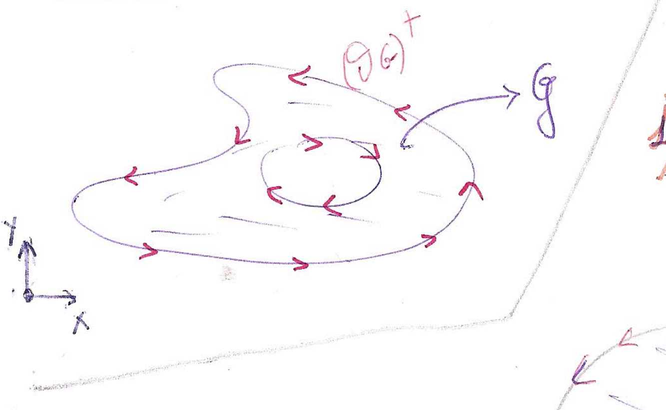
Μάθημα 29 (συνέχεια)
(13/05)

Εφ. Μορφή Θ. Green

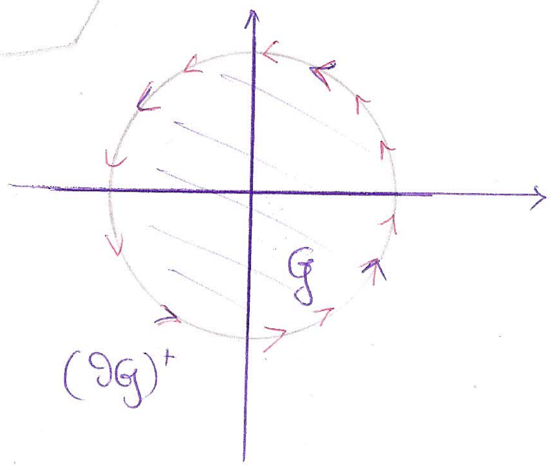
G = στοιχειώδες σύνολο Green, $(\partial G)^+$ = σύνορο του G δεξιά προσανατολισμένα.

$$\boxed{\int_{(\partial G)^+} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dx\,dy \quad (\text{I})}$$



Ασκήσεις

1) Να επαληθευτεί ο τύπος (I) για $\vec{F}(x,y) = (x+y,\ y)$ στο $G = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$
(το G είναι απλό σύνολο Green)



$(\partial G)^+ : \ \vec{r}(t) = (\text{συν}t, \text{ημ}t), \quad t \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}\,'(t) = (-\text{ημ}t, \text{συν}t)$

$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(\text{συν}t, \text{ημ}t) = (\text{ημ}t + \text{συν}t, \text{ημ}t)$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\text{ημ}t+\text{συν}t, \text{ημ}t)\cdot(-\text{ημ}t, \text{συν}t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\text{ημ}^2t - \text{ημ}t\,\text{συν}t + \text{ημ}t\,\text{συν}t)\,dt = -\int_0^{2\pi} \text{ημ}^2t\,dt = -\pi$$

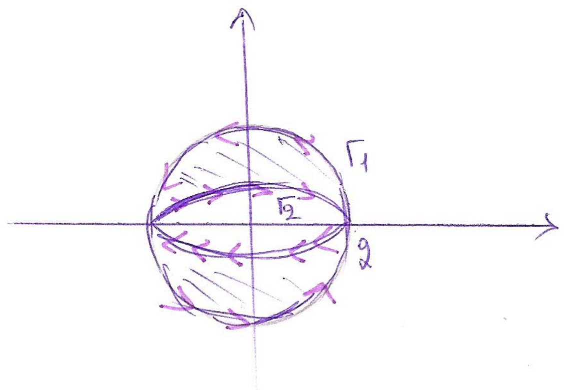
$$\boxed{I_1 = -\pi}$$

$\vec{F}=(P,Q)$, $P(x,y)=x+y$, $Q(x,y)=y$

$$I_2=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_G(0-1)\,dx\,dy=-\iint_G dxdy=-7$$

$\boxed{I_2=-7}$ Τελικά $I_1=I_2$

2) Να επαληθευτεί ο τύπος (I) για $\vec{F}(x,y)=(4x-2y,\ 2x+6y)$ στο $G=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 4,\ \left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2\ge 1\right\}$ (στοιχειώδες χωρίο [illegible])



• $I_1=\int_{\partial G^+}(\vec{F}\circ\vec{r}\,')\,dt$

$\Gamma_1^{+}:\ \vec{r}_1(t)=(2\cos t,\ 2\sin t),\quad t\in[0,2\pi]$ $\quad[x^2+y^2=4]$

$\Gamma_2^{+}:\ \vec{r}_2(t)=(2\cos t,\ \sin t),\quad t\in[0,2\pi]$ $\quad\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1\right]$

• $I_1 = \int_{(\partial G)^+} (\vec{F}\cdot\vec{r}\,')\,dt = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1\,'(t)\,dt - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2\,'(t)\,dt =$

$\int_0^{2\pi} (8\,\text{συν}t - 4\,\text{ημ}t,\ 4\,\text{συν}t + 12\,\text{ημ}t)\cdot(-2\,\text{ημ}t,\ 2\,\text{συν}t)\,dt -$

$- \int_0^{2\pi} (8\,\text{συν}t - 2\,\text{ημ}t,\ 4\,\text{συν}t + 6\,\text{ημ}t)\cdot(-2\,\text{ημ}t,\ \text{συν}t)\,dt = \dots$

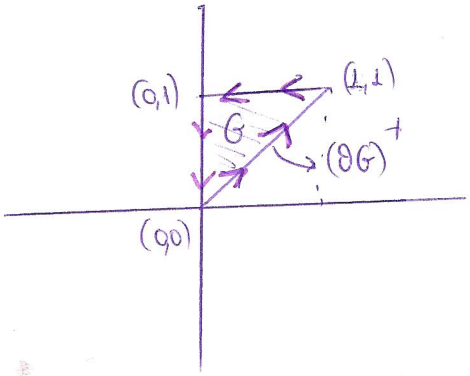
$= \int_0^{2\pi} (4 + 18\,\text{ημ}t\,\text{συν}t)\,dt = \dots = 8\pi$

$I_2 = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_G (2-(-2))\,dx\,dy = 4\iint_G dx\,dy =$

$= 4(\pi\cdot 2^2 - \pi\cdot 2) = 8\pi$

(Εμβαδόν G = (Εμβαδόν κύκλου ακτίνας $\alpha=2$) − (Εμβαδόν έλλειψης με $\alpha=2, \beta=1$) =
$= \left(\pi\alpha^2\big|_{\alpha=2}\right) - \left(\pi\alpha\beta\right)_{\alpha=2,\beta=1} = \pi 2^2 - \pi\cdot 2 = 2\pi$)

3) Να υπολογιστεί η ροή του $\vec{F}(x,y) = (xy - x^2, x^2 y)$ κατά μήκος του σύνορου του τριγώνου G με κορυφές τα $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$



$G = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \ , \ x \le y \le 1\}$ (x-κάθετο)
$= \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le x \le y\}$ (y-κάθετο)

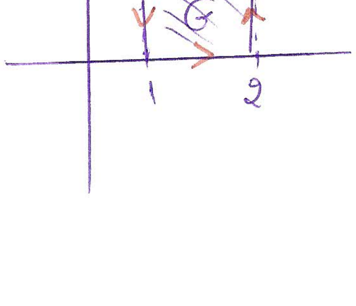
(από του τύπο (I)) σελ. 223

$$I = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 (2xy - x) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (xy^2 - xy) \Big|_x^1 dx = -\int_0^1 (y^3 - y^2) dy =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = +1/12 \ //$$

4) Να υπολογιστεί η ροή του $\vec{F}(x,y) = (x - xy, y^3 + 1)$ κατά μήκος του σύνορου του $G = [1,2] \times [0,1]$



$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 (0 - (-x)) dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 3/2 \ //$$