Μάθημα 27 (20/5/11)

Επιφανειακά Ολοκληρώματα (Εισαγωγή)
(Σκοπός: Θεώρημα Stokes, Μαθ. 28)

Απαιτούμενα.

(1) Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου
(2) Παραμετρικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.
(3) Ολοκλήρωμα επί (παραμετρικής) επιφάνειας
α) Βαθμωτού Πεδίου β) Διαν. Πεδίου.

(1) Υπενθυμίζουμε την έννοια του Στροβιλισμού.

Ορισμός. Έστω $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F=(P,Q,R)$ ε[να]
C^1 διανυσματικό πεδίο (δηλαδή οι συναρ[τήσεις]
$P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ έχουν
συνεχείς παραγώγους ως προς τις μεταβλη[τές]
τους). Ο στροβιλισμός του $\vec{F}$ είναι το
διανυσματικό πεδίο

$$\vec{\mathrm{rot}F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right.$$

Ειδικά αν $\vec{F}=(P,Q,0)$ τότε

$$\vec{\mathrm{rot}F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \perp \vec{F}.$$

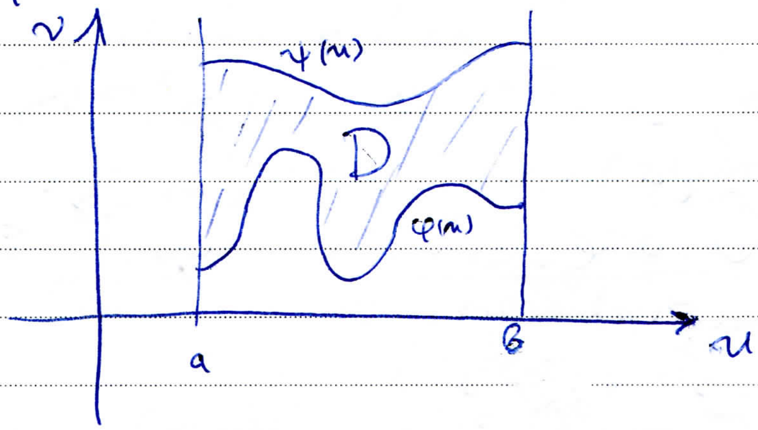
(2) Παραμετρικές Επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$

<u>Ορισμός</u> Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Το D θα λέγεται u-απλό (ή v-απλό) εάν υπάρχουν συνεχείς $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$D = \{(u,v) : a \le u \le b,\ \varphi(u) \le v \le \psi(u)\}$$

$$\left(\text{ή } D = \{(u,v) : a \le v \le b,\ \varphi(v) \le u \le \psi(v)\} \right)$$

Εποπτικά, το D αποτελεί το τμήμα του επιπέδου ανάμεσα στα γραφήματα των φ και ψ:



<u>Σύμβαση.</u> Θα καλούμε το D <u>απλό</u> χωρίς να διακρίνουμε εάν είναι u-απλό ή v-απλό. Όλα τα σύνολα D στη συνέχεια θα θεωρούνται απλά.

<u>Ορισμός.</u> Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, και $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ συνεχ

Το σύνολο $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται παραμετρική επιφάνεια. Η απεικόν $\vec{r}$ καλείται παραμέτρηση της S.

<u>Σχόλιο.</u> Ο ορισμός δεν αποκλείει διάφορε "παθολογικές" περιπτώσεις επιφανειών, όπω επιφάνειες με γωνίες ή με αυτοτομές. Θα περιορίσουμε τις εξεταζόμενες επιφάνει ως ακολούθως.

<u>Ορισμός.</u> Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ παραμετρική επιφάνεια. Η S θα καλείται

α) <u>C^1</u>, εάν η $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ είναι C^1.

β) <u>Ομαλή</u>, εάν η $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ πληροί την σχέ
(ή <u>λεία</u>)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq (0,0,0)$$

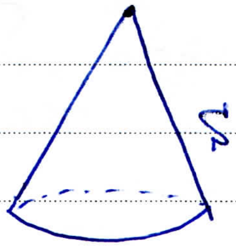
παντού στο D (Γεωμετρικά, η S έχει παντού εφαπτόμενο επίπεδο).

γ) <u>Απλή</u>, εάν η $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

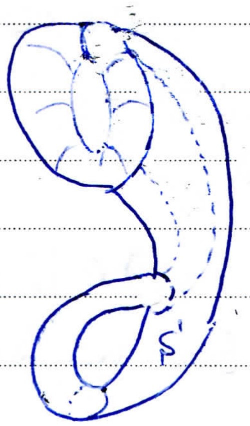
<u>Παρατήρηση.</u> Η $\vec{r}$ <u>δεν</u> είναι <u>μοναδική</u>.

Σχόλιο.

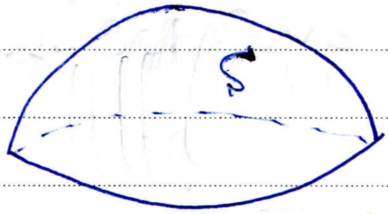
S: ένωση δυο επιπέδων.
όχι C^1



S: κώνος (ορθός, κυκλικ
όχι ομαλή



S: "Μποτίλια του Klein"
όχι απλή

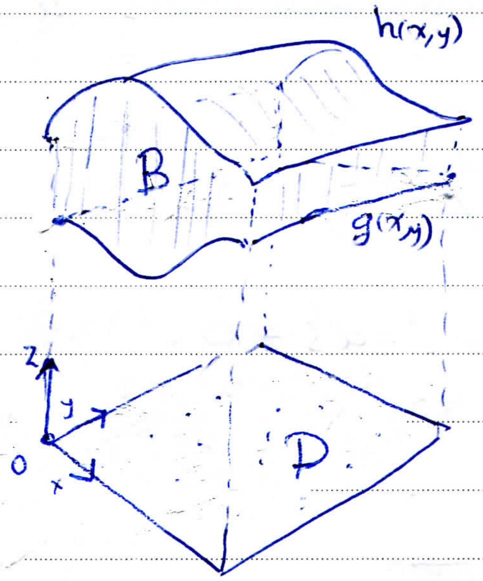


S: επιφάνεια
ημισφαιρίου του $\mathbb{R}^3$:
C^1, ομαλή, απλή.

Παρατήρηση. Θεωρούμε την υπερβολή $\{(y,z): z = 1/y,\ y>0\}$ στο επίπεδο Oyz. Την περιστρέφουμε περί τον άξονα Oz και καλούμε την επιφάνεια που προκύπτει "ψευδόσφαιρα". Η ψευδόσφαιρα είναι C^1, ομαλή, απλή. Μα στο $(0,0,0)$ απειρίζεται. Επιθυμούμε να αποκλείσουμε αντίστοιχες επιφάνειες από την ανάλυσή μας.
Εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός.</u> Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται

xy-απλό, εάν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις
$g: D \to \mathbb{R}^3$, $h: D \to \mathbb{R}^3$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλό
έτσι ώστε
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y) \leq z \leq h(x,y),\ (x,y)$$



<u>Σύμβαση.</u> Αντίστοιχοι ορισμοί ισχύουν για

yz-απλά, xz-απλά σύνολα. Θα καλούμε το B
απλό χωρίς να εξακριβώνουμε εάν είναι
xy-απλό κ.ο.κ.

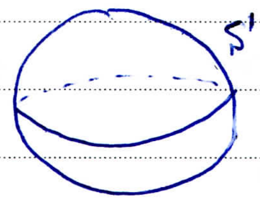
Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την έννοια
της κλειστής επιφάνειας.

<u>Ορισμός.</u> Έστω S (παραμετρική) επιφάνεια
του $\mathbb{R}^3$. Η S θα λέγεται <u>κλειστή</u> εάν
$S = \partial B$, όπου $B \subseteq \mathbb{R}^3$ απλό.

Ορισμός. Μια επιφάνεια $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ η οποία είναι C^1, ομαλή, απλή και κλειστή θα λέγεται **κανονική**.

Παραδείγματα Επιφανειών.

① Επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $a>0$.



$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=a\} = \partial\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$$

και $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ είναι xy-απλό, καθώς

$$B = \{(x,y,z) : -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x^2+y^2 \le a$$

Η S είναι κανονική επιφάνεια. Αντίθετα, η επιφάνεια του ημισφαιρίου

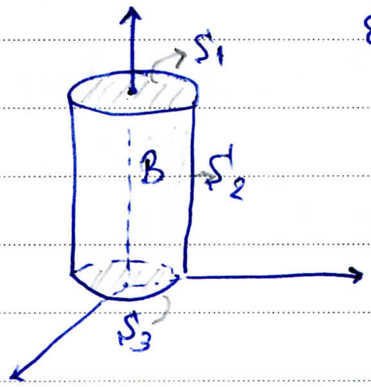
$$S_+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=a^2,\ z \geq 0\}$$

δεν είναι κλειστή επιφάνεια (γιατί;)

②

Επιφάνεια ορθού κυκλικού κυλίνδρου, ακτίνας βάση
$a>0$ και ύψους $b>0$.

Η S' αποτελείται από την ένωση των επιφανειών S_1 της κορυφής, S'_2 της πλευρικής επιφάνειας, και S_3 της βάσης.



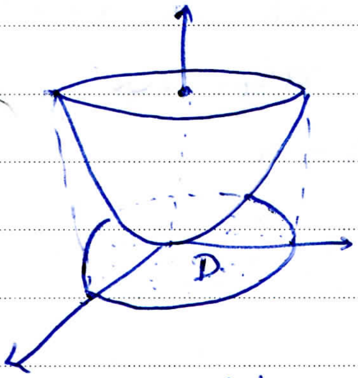
Πράγματι, εάν

$$B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le b\}$$

τότε $\partial B=\{(x,y,z): x^2+y^2=a^2,\ 0<z<b\}\cup\{(x,y,z): z=0,\ x^2+y^2<a^2\}\cup\{(x,y,z):\ z=b,\ x^2+y^2<a^2\}$

$= S_2\cup S_3\cup S_1.$

(3) Επιφάνεια ορθού κυκλικού παραβολοειδούς



$$S=\{(x,y,z):\ z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1\}$$

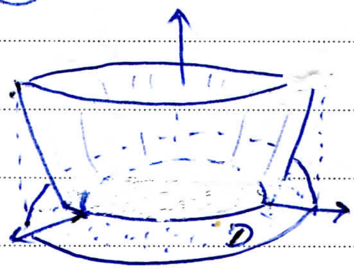
Το S δεν είναι κλειστή επιφάνεια (γιατί;)

Μια παραμέτρηση για την S είναι η

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))=(x,y,x^2+y^2),\ (x,y)\in D$$

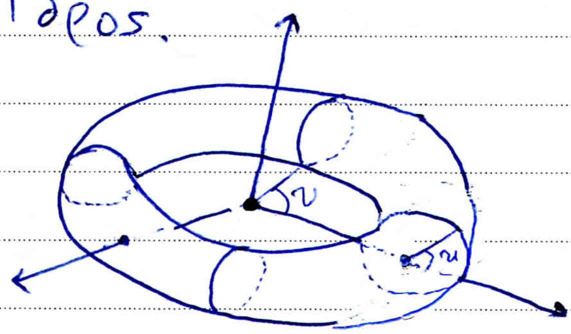
όπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$. Δηλαδή η S είναι το γράφημα της συνάρτησης $z(x,y)=x^2+y^2$ επί του D.

④ "Φρουτιέρα".



$$S = \{(x,y,z) : z = -1 + (x^2+y^2),\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$
$$\cup \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$$

⑤ Τόρος.



Θεωρούμε κύκλο κέντρου $(R,0,0)$ και ακτίνας $r>0$ στο επίπεδο Oxz. Με περιστροφή περί τον άξονα Oz, αποκτούμε την επιφάνεια

$$S = \{ \vec{r}(u,v) : 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi \}$$

όπου

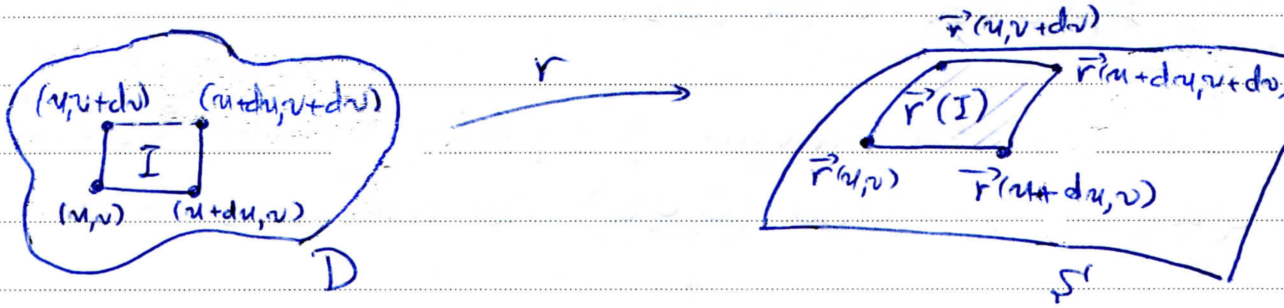
$$\vec{r}(u,v) = \big((R + r\cos u)\cos v,\ (R + r\cos u)\sin v,\ r\sin u \big)$$

και οι παράμετροι u, v είναι οι γωνίες του σχήματος.

Εμβαδόν Κανονικής Επιφάνειας.

Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ κανονική επιφ

Θεωρούμε στοιχειώδες τετράγωνο εντός του D και την εικόνα του επί της S :



Έχουμε ότι το στοιχειώδες εμβαδόν του $\vec{r}(I)$

$$dS = \| (\vec{r}(u+du,v) - \vec{r}(u,v)) \times (\vec{r}(u,v+dv) - \vec{r}(u,v$$

$$\simeq \| \vec{r}_u(u,v)\, du \times \vec{r}_v(u,v)\, dv \|$$

$$= \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| \, du\, dv$$

Αναμένουμε πως ολοκληρώνοντας τα στοιχει εμβαδά θα έχουμε το εμβαδό της S. Πράγμ

<u>Ορισμός.</u> Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ κανον επιφάνεια. Το εμβαδόν της S είναι

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| \, du\, dv .$$

Παρατηρήσεις ① Το εμβαδόν είναι ανεξάρτητο της παραμέτρισης.

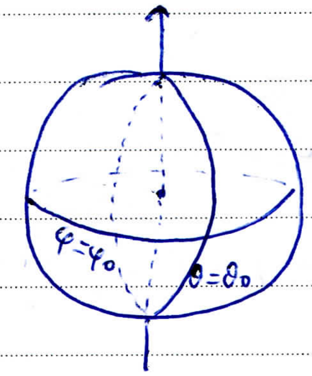
② Εαν η S είναι το γράφημα της $z(x,y)$, τότε

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx dy.$$

Ασκήσεις.

(1) Εμβαδόν σφαίρας.

Έστω η επιφάνεια $S = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=a^2\}$ σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $a>0$.



Γεωγραφικό μήκος/ γεωγραφικό πλάτος

Θεωρούμε την παραμέτριση

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\varphi)$$

όπου $(\theta,\varphi)\in D$, $D=[0,2\pi]\times[0,\pi]$

Υπολογίζουμε

$$\|r_\theta \times r_\varphi\| = \|(-a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ 0)\times(a\cos\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\cos\varphi$$

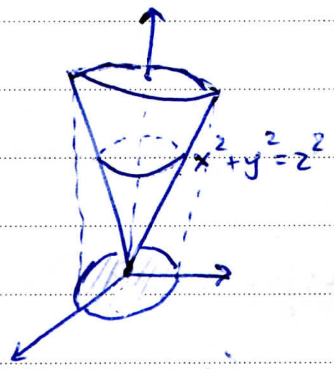
$$= a^2\sin\varphi,$$

όποτε $A(S) = \iint_D \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\| \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$

$= 4\pi a^2.$

(2) Εμβαδόν κώνου.

Έστω $S = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2}, \ 0 \le z \le 1\}$



Θεωρούμε την παραμέτρηση

$\vec{r}(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$

όπου $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0,1] = D$.

Έχουμε $\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\| = \sqrt{2}\, z$, άρα

$A(S) = \iint_D \sqrt{2}\, z \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} z\sqrt{2} \, dz \, d\theta = \pi \sqrt{2}$

Σημείωση. Η S δεν είναι κανονική στο (0,
μα δεν υπάρχει συνεισφορά στο εμβαδόν ε

Παρατήρηση. Η επιλογή κατάλληλης παρα-
μέτρησης απλοποιεί πολύ το ολοκλήρωμα

$\iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv.$

(3ε) Επιφανειακά Ολοκληρώματα Βαθμωτού Πεδίου

Ορισμός. Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ κανονική επιφάνεια και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\,du\,dv.$$

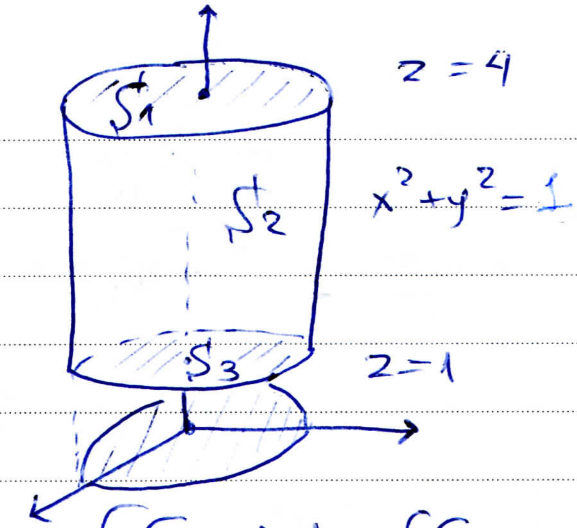
Ερμηνεία. Έστω S λεπτό φύλλο υλικού. Εάν $f(x,y)$ η πυκνότητα στο σημείο $(x,y) \in$ τότε

$$\iint_S f\,dS = \text{μάζα του } S.$$

Άσκηση. Έστω S η επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ με βάσεις στα επίπεδα $z=1$, $z=4$. Εάν $\delta(x,y,z) = z(x^2+y^2)$ να υπολογιστεί το

$$M = \iint_S \delta\,dS.$$

Απάντηση. Έχουμε $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ όπου



Είναι

$$\iint_{S^+} \delta\, dS = \iint_{S_1^+} \delta\, dS + \iint_{S_2^+} \delta\, dS + \iint_{S_3^+} \delta\, dS.$$

Θεωρούμε τις παραμετρήσεις

$$S_1^+ = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 4) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$S_2^+ = \{(\cos\theta, \sin\theta, z) : 1 \le z \le 4,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$S_3^+ = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

και υπολογίζουμε

$$\iint_{S_1^+} \delta\, dS = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 4\rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\|\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta\|\, d\rho\, d\theta = 15\pi$$

$$\iint_{S_2^+} \delta\, dS = \iint_{[1,4]\times[0,2\pi]} z(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\|\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta\|\, dz\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

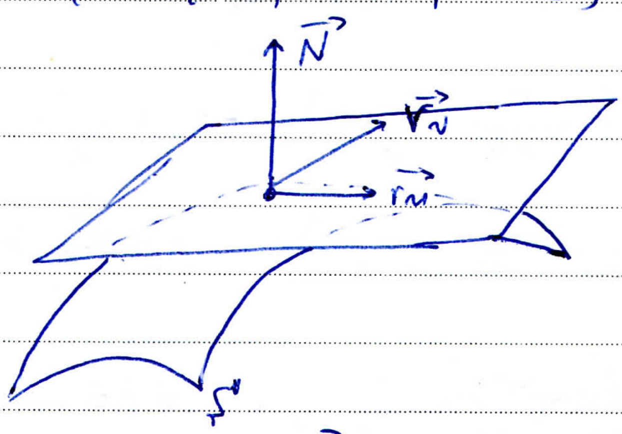
$$\iint_{S_3^+} \delta\, dS = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\|\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta\|\, d\rho\, d\theta = 2\pi$$

Τελικώς

$$\iint_S \delta\, dS = 15\pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

(3β) Επιφανειακό Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου.

Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ κανονική επιφάνεια



Το διάνυσμα $\vec{r_u}(u,v)$ είναι εφαπτόμενο στην S στο $\vec{r}(u,v)$, όπως και το $\vec{r_v}(u,v)$. Συνεπώς το διάνυσμα $\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\vec{r}(u,v)$, και το διάνυσμα

$$\vec{N} = \frac{1}{\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|} \vec{r_u} \times \vec{r_v}$$

είναι μοναδιαίο και **κάθετο** στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\vec{r}(u,v)$.

Εαν $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι ένα συνεχές διαν. πε
τότε η ροή του $\vec{F}$ μέσω του στοιχειώδους
εμβαδού dS της S είναι

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot \vec{N}(u,v)\,dS = \vec{F}\cdot(\vec{N}\,dS)$$
$$= \vec{F}\cdot d\vec{S}.$$

<u>Ορισμός.</u> Η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S είναι

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$$

$$= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot \vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\,du\,dv$$

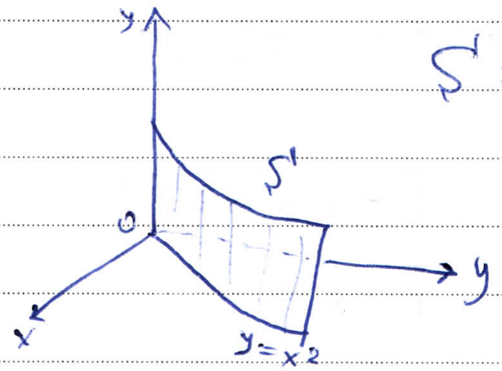
<u>Παρατήρηση.</u> Η ροή εξαρτάται από την π
ραμέτρηση, με την έννοια πως η επιλογή
του $-\vec{N}$ ως καθέτου της S, μας δίνει αν
θετο πρόσημο για την ροή.

<u>Ασκήσεις.</u>

① Να βρεθεί η ροή του πεδίου $\vec{F}(x,y,z)=(yz,x,$
διαμέσου της επιφάνειας

$$S=\{(x,y,z): y=x^2,\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 4\}$$

Απάντηση. Θεωρούμε την παραμέτρηση



$$S' = \{\vec{r}(x,z) = (x, x^2, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 4\}$$

Ισχύει $F(\vec{r}) = (x^2 z, x, -z^3)$

και επίσης

$$\vec{r_x} \times \vec{r_z} = (2x, -1, 0)$$

συνεπώς

$$\iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS' = \iint_{[0,1]\times[0,4]} \vec{F} \cdot \vec{r_x} \times \vec{r_z}\, dx\, dz$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,4]} (x^2 z, x, -z^3) \cdot (2x, -1, 0)\, dx\, dz$$

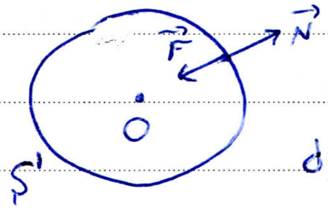
$$= \iint_{[0,1]\times[0,4]} (2x^3 z - x)\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^4 (2x^3 z - x)\, dz \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ 2x^3 \cdot \frac{4^2}{2} - 4x \right\} dx$$

$$= 6.$$

(2) Να βρεθεί η ροή του πεδίου $\vec{F}(x,y,z$
$=(-x,-y,-z)$ διαμέσου της $S'=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a$



Έχουμε $S'=\{\vec{r}(\theta,\varphi) : (\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[$
όπου $\vec{r}(\theta,\varphi)=(a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos$
και $\vec{r_\theta}\times\vec{r_\varphi} = -a\sin\varphi\,\vec{r}(\theta,\varphi)$.

Τελικώς

$$\iint_{S'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{r}\cdot\vec{N}\,dS' = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \|\vec{r}\|^2 a\sin\varphi\, d\varphi\, d$$

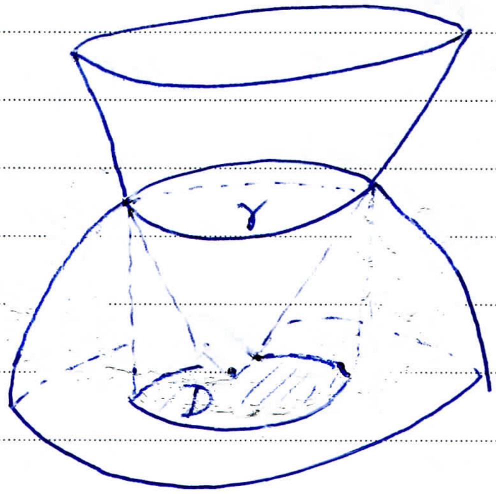
$$=4\pi a^3.$$

<u>Παρατήρηση</u>. Η ροή είναι ίση με

$$4\pi a^3 = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \iiint_{\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq a^2\}} 3\,dx\,dy\,dz$$

Το Θεώρημα Gauss μας επιτρέπει να υπολογί
τη ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας
χρησιμοποιώντας το τριπλό ολοκλήρωμα τη
απόκλισης.

3) Να βρεθεί το εμβαδόν A που κόβει ο κώνος $z=\sqrt{x^2+y^2}$ από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=2$.



Απάντηση.

Αναζητούμε την καμπύλη γ της τομής των:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=2 \Rightarrow x^2+y^2=1.$$

Οπότε η προβολή του τμήματος της σφαίρας στο Oxy επίπεδο είναι το σύνολο

$$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\}$$

Η εξίσωση της σφαίρας είναι $x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow$ $z=z(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$, για $(x,y)\in D$, είναι η παράσταση του τμήματος ως γράφημα επί του D. Συνεπώς

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$= \iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\, dx\,dy.$$

Αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$

με $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$. Τελικά

$$A = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\, r}{\sqrt{2-r^2}}\, dr$$

$$= -\sqrt{2}\,\pi \int_0^1 \frac{d(-r^2)}{\sqrt{2-r^2}}$$

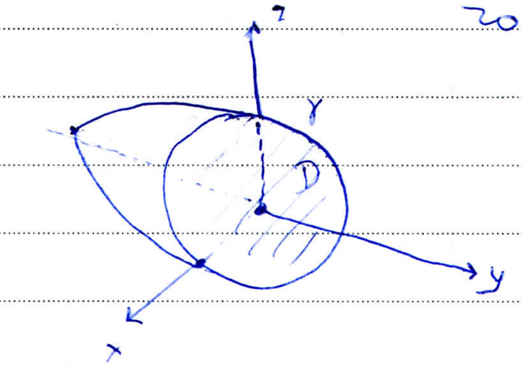
$$= -\sqrt{2}\,\pi \int_0^1 \frac{d(2-r^2)}{\sqrt{2-r^2}}$$

$$= -\pi\sqrt{2}\left[2\sqrt{2-r^2}\right]\Big|_0^1$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\{\sqrt{2}-1\}.$$

Άσκηση. Να βρεθεί το εμβαδόν που κόβει το επίπεδο $y=0$ από το παραβολοειδές $x^2+y+z^2=2$

Απάντηση. Υπολογίζουμε την καμπύλη γ της τομής των δυο επιφανειών:



$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+y+z^2=0 \end{cases} \Longrightarrow x^2+z^2=2$$

άρα προβάλλοντας στο Oxz επίπεδο, έχουμε πως η ζητούμενη επιφάνεια είναι το γράφημα της συνάρτησης $y=y(x,z)=2-x^2-z^2$ επί του $D=\{(x,z): x^2+z^2\leq 2\}$. Συνεπώς το εμβαδόν της είναι

$$\iint_{S'} dS' = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\,dz = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\,dz$$

$$\underset{\text{(πολικές)}}{=} \iint_{[0,\sqrt{2}]\times[0,2\pi]} \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi\sqrt{1+4r^2}\, r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2}\right]' dr$$

$$= \frac{52\pi}{3}.$$