Ενότητα 3 (συνέχεια)

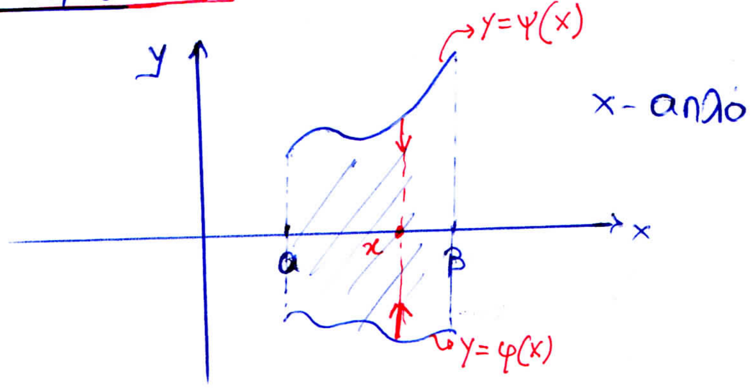
Διπλό ολοκλήρωμα

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

i) $D = \{(x,y) : a \leq x \leq \beta,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

$\phi, \psi : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς

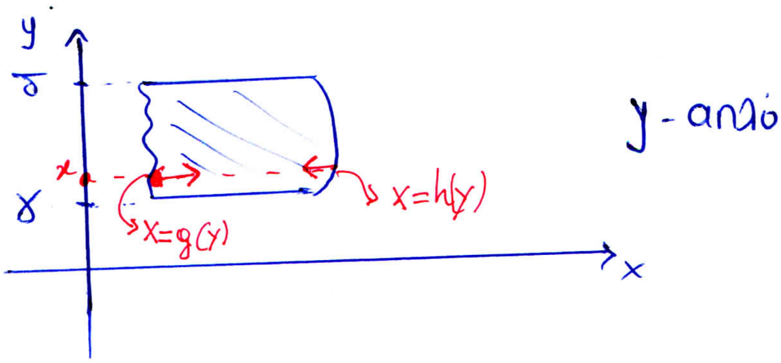
x-απλό



ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma \leq y \leq \delta,\ g(y) \leq x \leq h(y)\}$

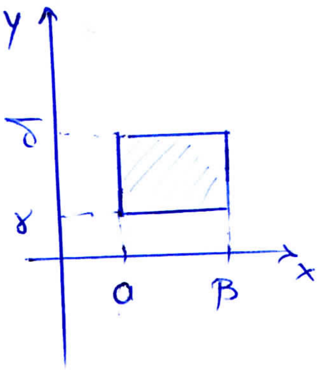
$g, h : [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς

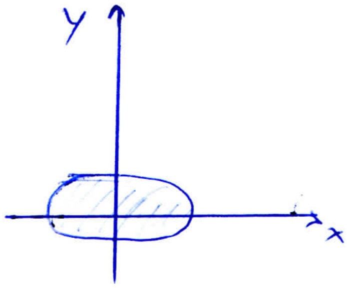
y-απλό

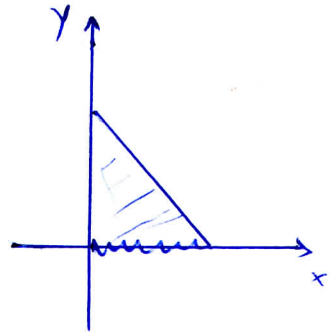


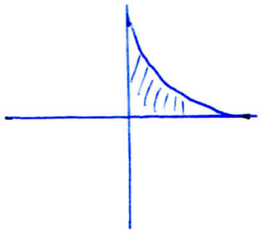
iii) D είναι x και y απλό

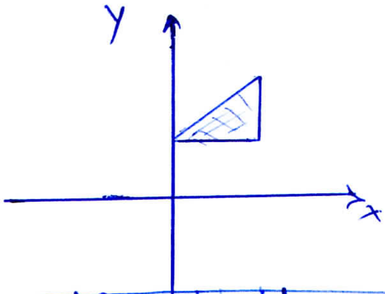
D απλό











Απλά σύνολα.

όχι x-απλό
όχι y-απλό

Θ. Fubini

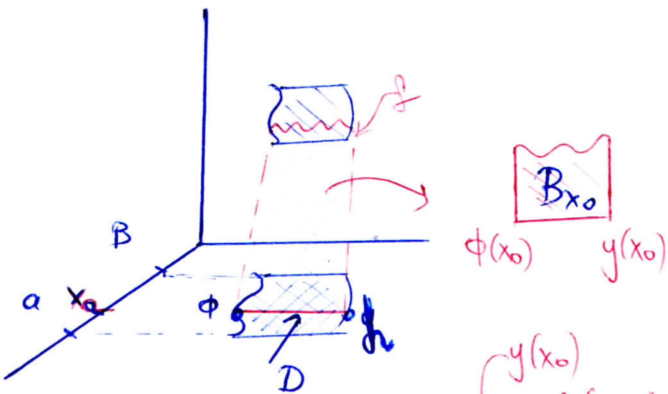
$f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής

i) D x-απλό $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{\beta}\left(\int_{\phi(x)}^{y(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$

ii) D y-απλό

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

$f=1$, $\displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy$ = εμβαδόν του D



$$\int_{\phi(x_0)}^{y(x_0)} f(x_0,y)\,dy = \text{εμβαδόν } B(x_0)$$

$f \geq 0$, $\Sigma(f,D) = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

$V(\Sigma(f,D)) =: \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

όγκος στερεού

$f = 1$, $V(\Sigma(f,D)) = A(D)$

Ασκήσεις:

1) $I = \iint_B (e^x ημy + x \cdot ημy)\,dx\,dy$, $B = [1,2] \times [0, \pi/2]$

$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 (e^x ημy + x \cdot ημy)\,dx \right) dy \left(= \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} (e^x ημy + x \cdot ημy)\,dy \right) dx \right)$

$I = \int_0^{\pi/2} \left(e^x \cdot ημy + \frac{x^2}{2} ημy \Big|_{x=1}^{2} \right) dy$

$I = \int_0^{\pi/2} \left((e^2 - e) ημy + \frac{3}{2} ημy \right) dy = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \int_0^{\pi/2} ημy\,dy$

$I = \left(e^2 - e + 3/2 \right) \left(-συνy \Big|_0^{\pi/2} \right)$

$I = e^2 - e + 3/2$

2) $I = \iint_T (6x+6y+6)\,dx\,dy$

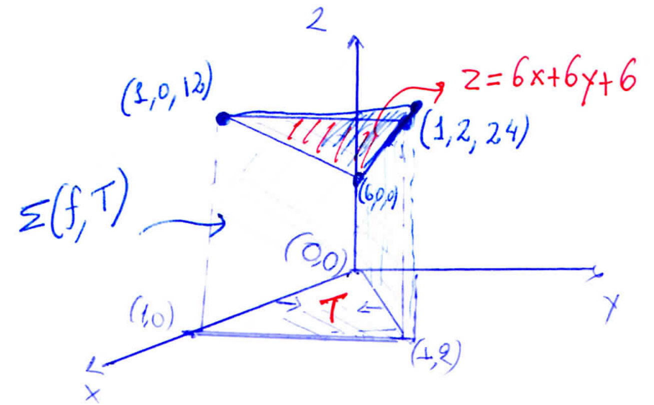
$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2x\}$ x-απλό

$$I = 6\int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x+y+1)\,dy \right) dx$$

$$I = 6\int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \Big|_{y=0}^{2x} \right) dx$$

$$I = 6\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{(2x)^2}{2} + 2x \right) dx$$

$$I = 6\int_0^1 (4x^2 + 2x)\,dx = 6\left[\frac{4}{3}x^3 + x^2 \right]_{x=0} = 6\left(\frac{4}{3} + 1 \right) = 14$$



$V(\Sigma(f,T)) = 14$

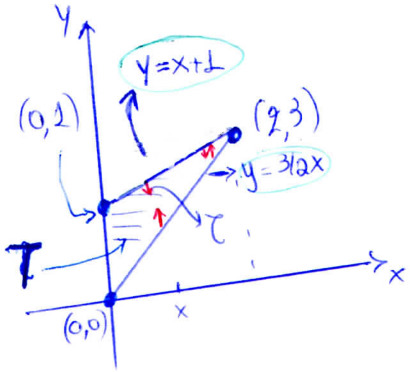
Ορίζουμε ως μάζα του D το $M = \iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy$ όπου

$\delta(x,y)$ = πυκνότητα μάζας στο (x,y)

Στην 2) υπολογίζουμε την μάζα της Τριγωνικής πλα
Τ με πυκνότητα $\delta(x,y)=6x+6y$

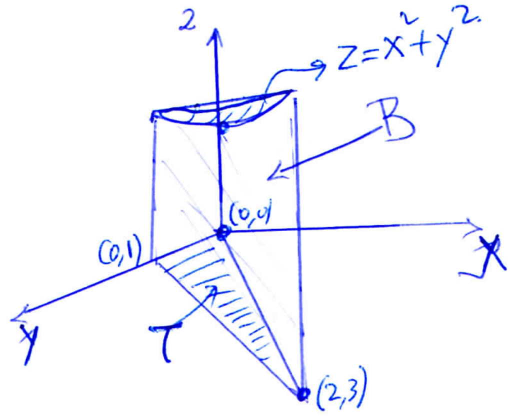
3) $I=\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy$

Τ τρίγωνο με κορυφές $A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma(2,3)$



$T=\{(x,y) : 0\le x\le 2,\ \frac{3}{2}x\le y\le x+1\}$

$$I=\int_0^2\left(\int_{\frac{3}{2}x}^{x+1}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \dots = 17/6$$



$z=x^2+y^2$

$$V(B)=\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Άλλες διατυπώσεις της 3)

Να υπολογιστεί ο όγκος του B.

$B=\{(x,y,z) : (x,y)\in T,\ 0\le z\le x^2+y^2=f(x,y)\}$

ή μάζα του Τ με $\delta(x,y)=x^2+y^2$

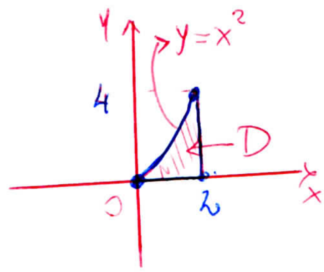
4) $I = \iint_D xy\, dx\, dy$

D περιβάλλεται από την $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \underbrace{0 \leq y \leq x^2}_{x\text{-απλό}}\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4,\ \underbrace{\sqrt{y} \leq x \leq 2}_{y\text{-απλό}}\}$

Περιγράφουν το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο. !



$I = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} xy\, dy \right) dx = \dots = \frac{16}{3}$

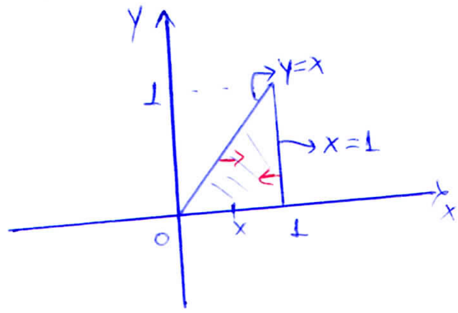
Αλλαγή της σειράς Ολοκλήρωσης

(Για μη υπολογίσιμα μονά ολοκλ.)

4) $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$

$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ \underbrace{y \leq x \leq 1}_{y\text{-απλό}}\} =$

$= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ \underbrace{0 \leq y \leq x}_{x\text{-απλό}}\}$



$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$

(*) Στο $\int e^{-x^2} dx$ } Δεν υπολογίζεται, διότι δεν υπάρχει στοιχειώδης
* Στο $\int \eta\mu x^2 dx$ } συνάρτηση f με $f'(x) = e^{-x^2} dx$ (βλ. και ανάπτυγμα Taylor)
(g με $g'(x) = \eta\mu x^2$)

2) $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \text{ημ}x^2\, dx \right) dy \overset{(*)}{=} \int_0^1 \left(\int_0^x \text{ημ}x^2\, dy \right) dx =$

$= \int_0^1 \left(\int_0^x \text{ημ}x^2\, dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \text{ημ}x^2\, dx = \left[-\frac{1}{2} \text{συν}(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\text{συν}$

Αλλαγή συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^2$

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_a^\beta f(t)\, dt \qquad (g'>0) \quad (t=g(x))$$

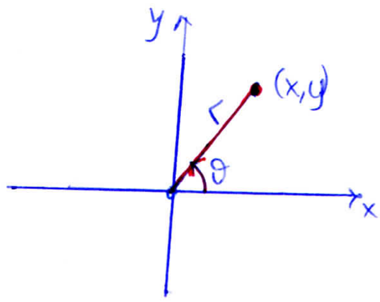
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad x \mapsto t = g(x)$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g'>0)$ (Αλλαγή μεταβλητής $t=g(x)$)

Πολικός μετασχηματισμός

$\vec{T}: [0,+\infty] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\vec{T}(r,\theta) = (r\cdot\text{συν}\theta,\ r\cdot\text{ημ}\theta)$



$J_{\vec{T}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \text{συν}\theta & -r\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & r\text{συν}\theta \end{pmatrix}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ = ορίζουσα του $J_{\vec{T}}(r,\theta)$

$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r}$

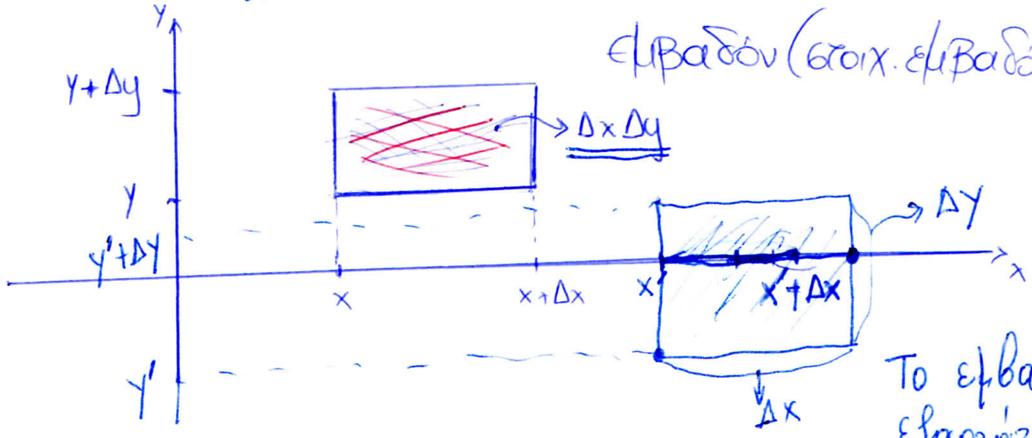
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\vec{T}^{-1}(D)} f(r\text{συν}\theta, r\text{ημ}\theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\phi}$$

Τύπος αλλαγής συντεταγμένων διπλού ολοκληρώματος (από x-y σε r-θ)

Μια κάποια προσέγγιση του τύπου

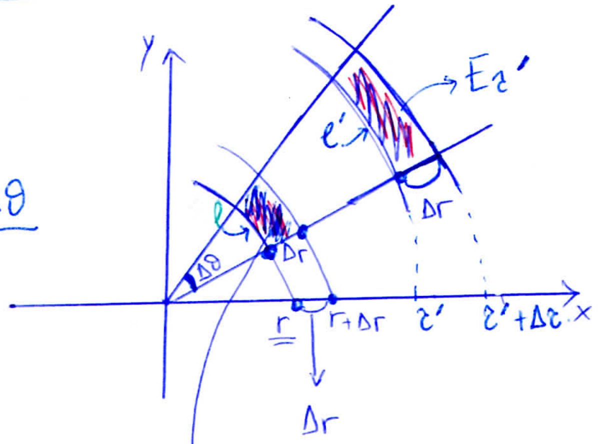
Εμβαδόν (στοιχ. εμβαδόν) σε καρτ. συντετ. Δx, Δy σταθερά

$E = \underline{\Delta x \cdot \Delta y}$



Το εμβαδόν E του ορθογωνίου εξαρτάται από τα Δx, Δy και όχι από τις κορυφές του.

Κρατάμε τα Δr, Δθ σταθερά



$E_r \approx (\Delta r)\ell = (\Delta r)\, r \cdot \Delta\theta = r\,\Delta r\,\Delta\theta$

Ενώ $E_{r'} \cong (\Delta r)\ell' = (\Delta r)(r'\Delta\theta) = r'\,\Delta r\,\Delta\theta.$

Παρατηρούμε ότι το "στοιχειώδες" εμβαδόν κρατώντας τα Δr, Δθ σταθερά μεταβάλλεται, ανάλογα με τις "κορυφές" του.