

12/04/2010 Πολλαπλά Ολοκληρώματα

1) Στον \mathbb{R}^n το σύνολο $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, n\}$
 καλείται ορθογώνιο διάστημα n . ($a_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad i=1, 2, \dots, n$) ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

Ιδιαιτέρα : Το I για $n=1$ καλείται (κλειστό) διάστημα, για $n=2$ καλείται ορθογώνιο παραλληλόγραφο, για $n=3$ καλείται ορθογώνιο παραλληlepipedo.

2) Ορίζεται ως μέτρο του I το $\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

Ιδιαιτέρα : Το $\mu(I)$ για $n=1$ καλείται μήκος, για $n=2$ εμβαδόν, για $n=3$ όγκος του I .

3) Εάν το I είναι ορθογώνιο και P_k είναι διαμέριση του $[a_k, b_k]$ $k=1, \dots, n$ τότε το $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ καλείται διαμέριση του I .

(ως γνωστόν αν $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ η $P = \{c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d\}$ καλείται διαμέριση του $[c, d]$.)

Ολοκληρώματα Riemann

1) Έστω $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση με ωστόσο ορισμό ορθογώνιου I του \mathbb{R}^n .
 Εάν P είναι διαμέριση του I και I_1, \dots, I_m είναι τα (υπο)ορθογώνια του αντιστοιχούν με P ορίζεται

$$m_k = \inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in I_k\}, M_k = \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in I_k\} \quad k=1, \dots, m \quad \text{και}$$

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^m m_k \mu(I_k), L(f, P) = \sum_{k=1}^m M_k \mu(I_k) \quad \text{το άνω και κάτω άθροισμα Riemann ως προς την διαμέριση } P.$$

ως άνω και κάτω ολοκληρώματα Riemann της f στο I ορίζεται :

$$\int_I f d\vec{x} = \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } I\}$$

$$\int_I f d\vec{x} = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } I\}$$

$$\text{ισχύει : } \int_I f d\vec{x} \leq \int_I f d\vec{x}$$

Εάν $\int_I f d\vec{x} = \int_I f d\vec{x}$ τότε η f καλείται ολοκληρώσιμη στο I κατά Riemann και την κοινή τιμή $\int_I f d\vec{x}$ καλείται ολοκληρώματα Riemann της f στο I

2) Έστω $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση με πεδίο ορισμού γραμμικό σύνολο B του \mathbb{R}^n

Εάν I είναι ορθογώνιο του \mathbb{R}^n με $B \subseteq I$ ορίζεται $g(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \vec{x} \in B \\ 0 & \vec{x} \in I \setminus B \end{cases}$

Εάν υπάρχει το ολοκλήρωμα ως $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ τότε ορίζεται

$\int_B f d\vec{x} = \int_I g d\vec{x}$ και η f καλείται ολοκληρώσιμη στο B .

Συμπίπτει : Ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες (γραμμικότητα, προθετικότητα) των γραμμιών για $n=1$.

Ανάλυση σύνολα στο $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

1) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Το B καλείται x -αξιο αν $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\varphi, \psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \leq \psi$.

Ανάλογα ορίζεται το y -αξιο.

Αξιο καλείται το σύνολο αν είναι x και y αξιο.

2) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Το B καλείται xy -αξιο αν $B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, w_1(x,y) \leq z \leq w_2(x,y) \}$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ x -αξιο σύνολο του \mathbb{R}^2 και $w_1, w_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $w_1 \leq w_2$.

Ανάλογα ορίζονται τα xz -αξιο, xz -αξιο, zx -αξιο, yz -αξιο, zy -αξιο.

Αξιο καλείται το σύνολο αν είναι xy και yx και xz και zx και yz και zy αξιο.

Θεώρημα Fubini (Διαδοχικών Ολοκληρωμάτων)

1) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$ x -αξιο σύνολο και $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει : $\int_B f d\vec{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right] dx$

Ανάλογα για y -αξιο σύνολο.

2) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$ xy -αξιο σύνολο και $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει : $\int_B f d\vec{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{w_1(x,y)}^{w_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dy \right] dx$

Ανάλογα για yx, \dots, zy αξιο σύνολο.

Ιδιαίτερα : Για $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, $\int_I f d\vec{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy \right] dx = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y) dx \right] dy$.
και για $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \times [\epsilon, \zeta]$, $\int_I f d\vec{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\epsilon}^{\zeta} f(x,y,z) dz \right] dy \right] dx = \dots = \int_{\epsilon}^{\zeta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y,z) dx \right] dy \right] dz$

Όγκος στον \mathbb{R}^n

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ γραμμικό σύνολο. Ορίζουμε ως όγκο του B το $V(B) = \int_B 1 d\vec{x}$ (αν υπάρχει).
 Για $n=1, 2, 3$ καθίσαται μήκος, εμβαδόν, όγκος του B , αντίστοιχα.

Παράδειγμα: Αν το B είναι x -αξιοτό στον \mathbb{R}^2 , τότε το εμβαδόν του $A(B) = \int_B 1 dx dy = \int_a^b [\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1 dy] dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx$

Αν το B είναι xy -αξιοτό στον \mathbb{R}^3 , τότε ο όγκος του $V(B) = \int_B 1 dx dy dz = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{w_1(x,y)}^{w_2(x,y)} 1 dz dy dx = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (w_2(x,y) - w_1(x,y)) dy dx$.

- Ανάλογα για τις άλλες περιπτώσεις για το B .
- Αν το B είναι ορθογώνιο τότε $V(B) = \mu(B)$

Μάζα, Ρομές, Κέντρο βάρους στον \mathbb{R}^n

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ γραμμικό σύνολο με πυκνότητα $\delta(\vec{x})$ στο $\vec{x} \in B$. Ορίζουμε ως μάζα του B το $M = \int_B \delta(\vec{x}) d\vec{x}$.

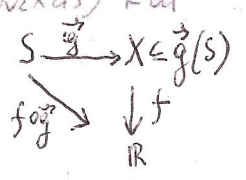
Εάν $M_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \int_B x_1 \delta(\vec{x}) d\vec{x}$, $M_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \int_B x_2 \delta(\vec{x}) d\vec{x}$, ..., $M_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} = \int_B x_n \delta(\vec{x}) d\vec{x}$

είναι οι πρώτες ρομές του B το κέντρο βάρους του B είναι το σημείο

$$\left(\frac{M_{x_1, x_2, \dots, x_n}}{M}, \frac{M_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}}{M}, \dots, \frac{M_{x_1, x_2, \dots, x_1}}{M} \right) \quad (M \neq 0)$$

Αλλαγές μεταβλητών

Έστω $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n) : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η \vec{g} είναι C^1 (υπάρχουν οι τμ. παραχίμωτοι και είναι συνεχείς) και η τακτωβία ορίζεται $|\vec{g}'(\vec{z})| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$ για κάθε $\vec{z} \in S$.
 (πιν. διαφορίσιμ.)



Εάν $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το $X \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικό σύνολο και η f είναι ομοκυβωσική στο X , τότε $\int_X f d\vec{x} = \int_{\vec{g}^{-1}(X)} f(\vec{g}(\vec{z})) \|\vec{g}'(\vec{z})\| d\vec{z}$

Συμπεράσμα: Για $n=1$, αν $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ (ωσι) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) |g'(t)| dt$ (*).
 Η ασοδειξη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιεί τον τύπο (*), το διωρημα της Αντιστροφής Συναρτήσεων στον \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) και πράξεις με διαφορίσιμα.
 Ο τύπος (*) καθοδικνύεται από το ΘΘΑΛ και τον κανόνα της Αλγεβρικής Παροχής.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$\frac{\partial (g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}$ η ορίζουσα του πίνακα Jacobi της $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$

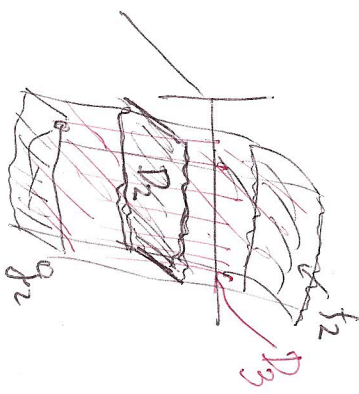
ΣΥΝΟΨΗ (\mathcal{L} =ήχος εσω \mathbb{R} , A =επιβαθόν εσω \mathbb{R}^2 , V_3 =όγκος εσω \mathbb{R}^3 , V_4 =όγκος εσω \mathbb{R}^4)

- $D_1 = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \in \mathbb{R}$, $f_1, g_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 \geq g_1$
- $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_1, g_1(x) \leq y \leq f_1(x)\}$, $f_2, g_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 \geq g_2$
- $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_2, g_2(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$, $f_3, g_3 : D_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3 \geq g_3$
- $D_4 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in D_3, g_3(x,y,z) \leq w \leq f_3(x,y,z)\}$, ... (work...)

~~επιβαθόν~~
 $\mathcal{L}(D_1) = b - a = \int_{D_1} 1 dx$

$A(D_2) = \int_{D_2} 1 dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{f_1(x)} 1 dy dx$
 $A(D_2) = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x)) dx = \int_{D_1} (f_1 - g_1) dx$

$f_1 \geq 0 = g_1$, $A(D_2) = \int_a^b f_1(x) dx$



$V_3(D_3) = \iiint_{D_3} 1 dx dy dz = \iint_{D_2} \int_{g_2(x,y)}^{f_2(x,y)} 1 dz dx dy$
 $V_3(D_3) = \iint_{D_2} (f_2(x,y) - g_2(x,y)) dx dy$

$f_2 \geq 0 = g_2$, $V_3(D_3) = \iint_{D_2} f_2 dx dy$

επιβαθόν επιβαθόν D_4 (βάση D_3 , ύψος 1)

$V_4(D_4) = \iiint_{D_4} 1 dx dy dz dw = \iiint_{D_3} \int_{g_3}^{f_3} 1 dw dx dy dz$
 $V_4(D_4) = \iiint_{D_3} (f_3 - g_3) dx dy dz$

$f_3 \equiv 1 \geq g_3 \equiv 0$
 $V_4(D_4) = \iiint_{D_3} 1 dx dy dz = \iint_{D_2} \int_{g_2(x,y)}^{f_2(x,y)} 1 dz dx dy = \iint_{D_2} (f_2 - g_2) dx dy = V_3(D_3)$

επιβαθόν επιβαθόν D_3 (βάση D_2 , ύψος 1)
 $f_2 \equiv 1 \geq 0 = g_2$
 $V_3(D_3) = \iint_{D_2} 1 dx dy = A(D_2)$

επιβαθόν επιβαθόν D_2 (βάση D_1 , ύψος 1)
 $f_1 \equiv 1 \geq 0 = g_1$
 $A(D_2) = \int_{D_1} 1 dx = \mathcal{L}(D_1)$