ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ TAYLOR
ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

1. Μερικές Παράγωγοι

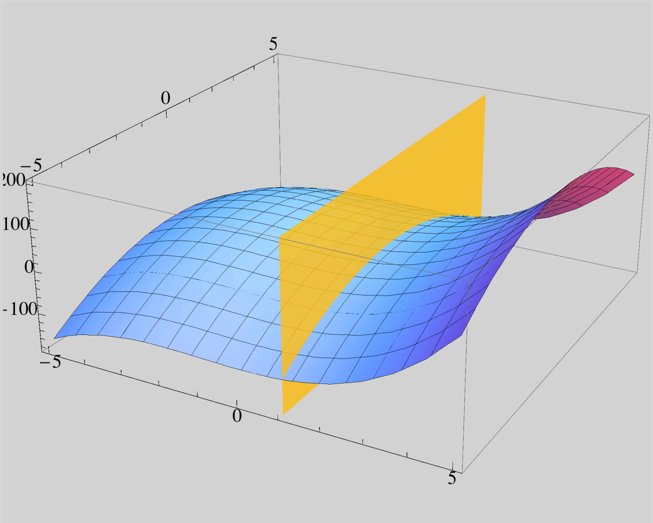
Όπως έχουμε ήδη δει οι ***μερικές παράγωγοι*** *μιας συνάρτησης* $f(x, y)$ *σε ένα σημείο* (x_0, y_0) *ορίζονται ως εξής:*

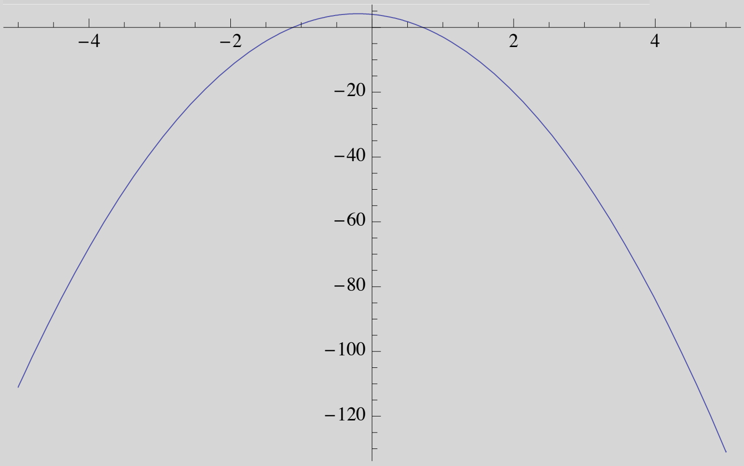
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h->0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h->0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

ενώ το ***ανάδελτα*** *της συνάρτησης (ή κλίση):* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0)\right)$.

Τα παρακάτω σχήματα είναι ενδεικτικά.
Για να βρούμε τη μερική παράγωγο ως προς x στο σημείο π.χ $(1, y_0)$, *"κόβουμε" τη συνάρτηση όπως φαίνεται στο σχήμα και βρίσκουμε την παράγωγο μιας απλής (μονοδιάστατης) συνάρτησης (της* $f(1, y)$*) στο σημείο* y_0.


5
0
−5
200
100
0
-100
−5
0
5


−4
−2
2
4
−20
−40
−60
−80
−100
−120

2. Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Η ***κατευθυνόμενη παράγωγος*** της f σε ένα σημείο (x_0, y_0), ως προς ένα διάνυσμα $\vec{u} = (u_1, u_2)$ υπολογίζεται ως εξής

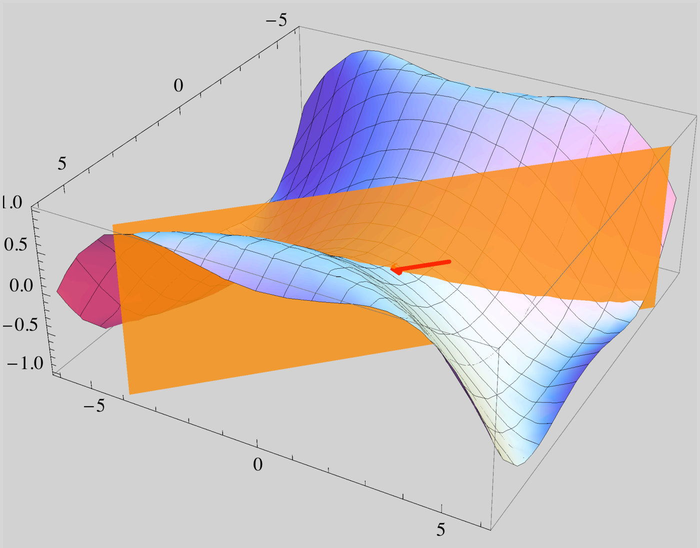
$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\, u_1, y_0 + h\, u_2) - f(x_0, y_0)}{h}$.

Αν η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη τότε $D_{\vec{u}}\, f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$

Προσοχή!

*Στον παραπάνω τύπο το διάνυσμα $\vec{u}$ πρέπει να είναι **μοναδιαίο**. Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να το "κανονικοποιήσουμε" διαιρώντας το με το μέτρο του.*

Για να βρούμε τη κατευθυνόμενη παράγωγος της f σε ένα σημείο (x_0, y_0), ως προς ένα διάνυσμα $\vec{u}$, "κόβουμε" τη συνάρτηση ως προς ένα επίπεδο παράλληλο στο $\vec{u}$ το οποίο διέρχεται από το (x_0, y_0) (όπως φαίνεται στο σχήμα) και βρίσκουμε την παράγωγο μιας απλής (μονοδιάστατης) συνάρτησης. Η φορά του διανύσματος $\vec{u}$ εκφράζει την κατεύθυνση από μικρότερες σε μεγαλύτερες τιμές του πεδίου ορισμού της μονοδιάστατης συνάρτησης.



3. Διαφορικό (Ι)

Η *συνάρτηση* f *θα λέγεται* **Διαφορίσιμη** *σε ένα σημείο* $\vec{a} = (x_0, y_0)$ *του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει ένας* ***γραμμικός μετασχηματισμός*** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *τέτοιος ώστε να ισχύει:*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - T(\vec{x}-\vec{a})|}{||\vec{x}-\vec{a}||} = 0.$$

Ισοδύναμα αντί για γραμμικό μετασχηματισμό μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό με έναν διάνυσμα A 1×2:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - A\cdot(\vec{x}-\vec{a})|}{||\vec{x}-\vec{a}||} = 0.$$

Αν η f *είναι διαφορίσιμη στο* $\vec{a}$, *τότε αποδεικνύεται ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός, ο οποίος ονομάζεται και* **Διαφορικό** *της* f *δίνεται από τον τύπο:*

$$D f(\vec{a}) \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; :$$

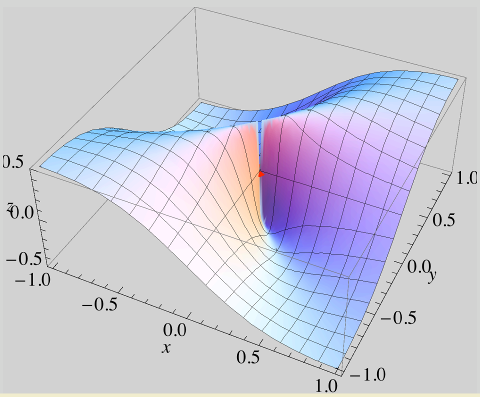
$$D f(\vec{a})(x, y) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (x, y) = f_x(\vec{a}) \cdot x + f_y(\vec{a}) \cdot y$$

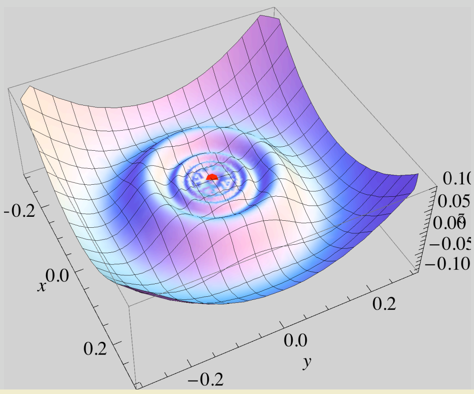
3. Διαφορικό (ΙΙ)

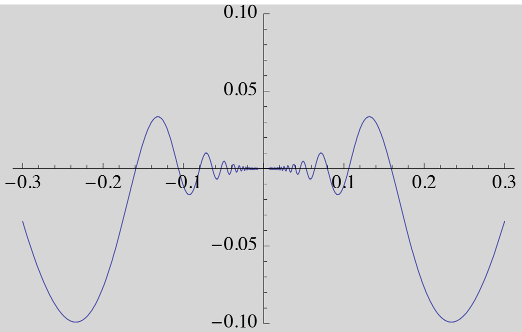
Αν μια συνάρτηση έχει **όλες τις μερικές παραγώγους** *σε ένα σημείο $\vec{a}$ του πεδίου ορισμού της, τότε ονομάζεται* **Παραγωγίσιμη** *στο $\vec{a}$. Η συνάρτηση ονομάζεται* $\boldsymbol{C^1}$ *στο $\vec{a}$, αν είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή γύρω από το $\vec{a}$ και αν όλες οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο $\vec{a}$.*
Για τα παρακάτω θεωρούμε ότι το $\vec{a}$ είναι **εσωτερικό σημείο** *του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.*

Αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε είναι και παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει (μάλιστα μπορεί η συνάρτηση να μην είναι ούτε συνεχής π.χ. η $f(x, y) = x\,y \big/ \left(x^2 + y^2\right)$με τιμή 0 στο O - σχήμα (α)).
Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και το ανάδελτα ικανοποιεί τη σχέση $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\left|f(\vec{x})-f(\vec{a})-\vec{\nabla} f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})\right|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0$, τότε η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

Αν μια συνάρτηση είναι C^1 στο $\vec{a}$ τότε η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει (π.χ. η $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \operatorname{Sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ με τιμή 0 στο O -σχήμα (β)+(γ)).







(α)

(β)

(γ)

4. Μερικές Παράγωγοι ανωτέρας τάξης

Οι μερικές παράγωγοι ανωτέρας τάξης ορίζονται με παρόμοιο τρόπο. Αξίζει *να αναφερθούμε στον* Εσσιανό *πίνακα* (Hessian) *μιας* C^2 *συνάρτησης* (*δηλαδή μιας συνάρτησης με συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης*) *ο οποίος συμβολίζεται συνήθως ως* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *και είναι ένας* 2×2 *πίνακας που ορίζεται ως εξής:*

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Το ***θεώρημα του* Clairaut** *εξασφαλίζει ότι ο πίνακας αυτός είναι συμμετρικός.*

◄ | ►

5. Πολυώνυμο Taylor (I)

Έστω $f:(a,b)\to R$, $(-\infty \le a < b \le \infty)$ και $x_0 \in (a,b)$. Το πολυώνυμο

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

για $x \in (a,b)$ καλείται n-οστό **πολυώνυμο Taylor** της f στο x_0. Το T_{n,x_0} καλείται n-οστό **πολυώνυμο Maclaurin** στο x_0 αν $x_0 = 0$.

◄ | ►

5. *Πολυώνυμο* Taylor (II)

Ιδιότητες του πολυωνύμου Taylor.

1) $T(x_0) = f(x_0)$, $T'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

2) *Έστω ότι υπάρχει η* $(n+1)$ *τάξης παράγωγος* $f^{(n+1)}$, *τότε υπάρχει* $c = c(x, n)$ *μεταξύ των* x_0, x *τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x). \end{aligned}$$

3) *Έστω ότι υπάρχει η* n*-οστή παράγωγος* $f^{(n)}$ *και* $\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0$ *για κάθε* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap (a, b)$. *Τότε ισχύει ότι* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap (a, b)$.
Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η f *είναι* ***παραστάσιμη σε σειρά*** **Taylor** (ή *ότι είναι παραστάσιμη σε σειρά* Maclaurin *αν* $x_0 = 0$) *στο* x_0.

5. Πολυώνυμο Taylor (III)

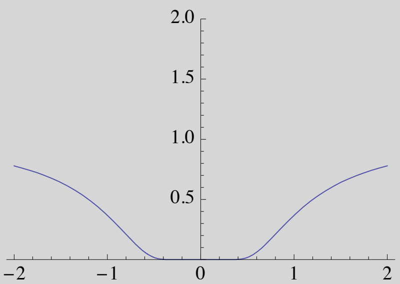
Παραδείγματα

1) Για $n = 0$ έχουμε: $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$, για κάποιο c μεταξύ των x, x_0 (θεώρημα ΜΤΔΛ).

2) Για $n = 2$ έχουμε: $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{(3)!}(x - x_0)^3$, για κάποιο c μεταξύ των x, x_0.

3) Οι παρακάτω συναρτήσεις αναπτύσσονται σε σειρά Maclaurin.
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$

4) Δεν αναπτύσσονται όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε σειρά Maclaurin (π.χ. η $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0) = 0$).



◄ | ►

5. Πολυώνυμο Taylor (IV)

Με παρόμοιο τρόπο και χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης μπορούμε να βρούμε το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Ειδικότερα, αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης, τότε υπάρχει $\vec{c}$ στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα $\overrightarrow{x_0}$, $\vec{x}$ τέτοιο ώστε:

$$f(\vec{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \vec{\nabla} f(\overrightarrow{x_0})(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) + (\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) \nabla^2 f(c)(\vec{x} - \overrightarrow{x_0})^T.$$

◀ | ▶

6. Γραμμικοποίηση (Ι)

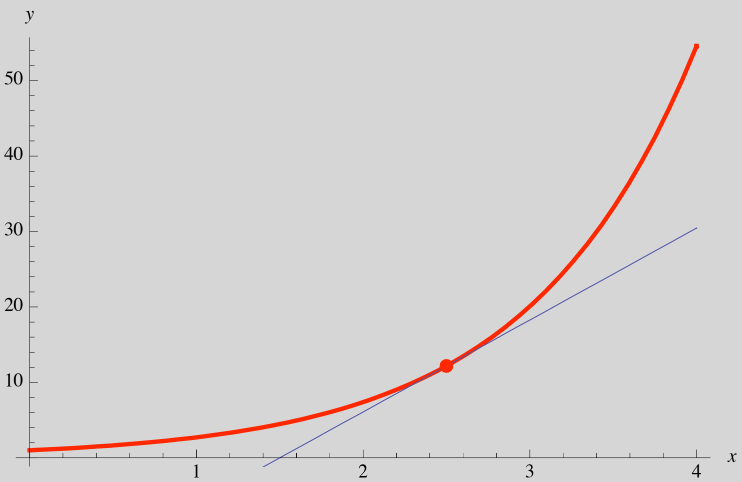
Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού ένα διάστημα. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο a του I, τότε σύμφωνα με τον τύπο **Taylor** μπορούμε να προσεγγίσουμε την f κοντά στο a με την αφφινική (affine) συνάρτηση:

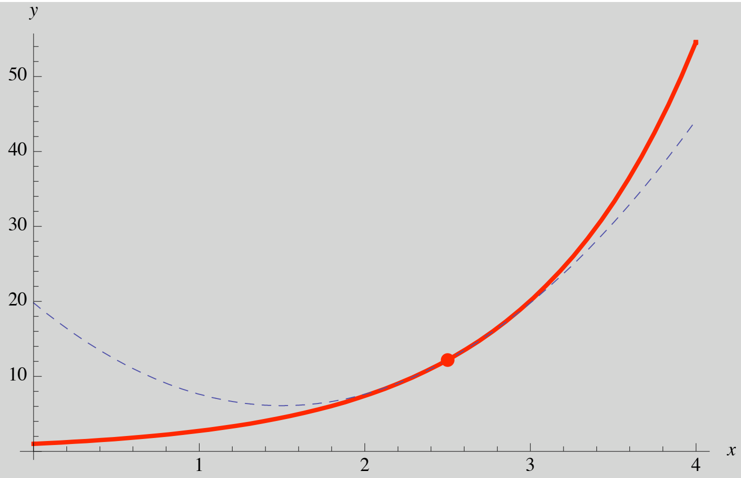
$$f(x) \cong L_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Αν η f έχει και παράγωγο δεύτερης τάξης τότε μπορούμε να την προσεγγίσουμε με ένα τριώνυμο:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a) \cdot (x-a)^2}{2!}.$$

Για παράδειγμα μπορούμε να δούμε τα παρακάτω σχήματα (η συνάρτηση είναι η e^x):




y
50
40
30
20
10
1
2
3
4
x

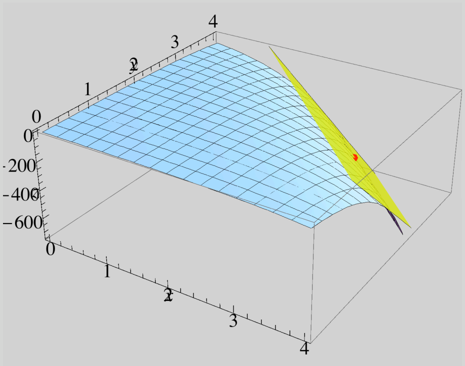
6. Γραμμικοποίηση (II)

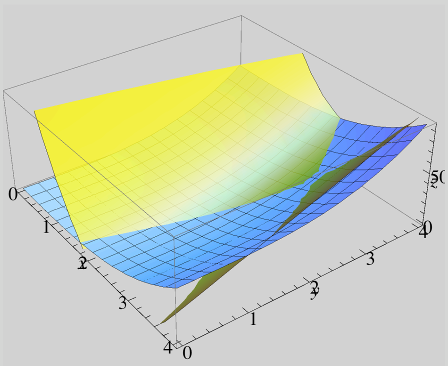
Με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor *μπορούμε προσεγγίσουμε μια συνάρτηση δύο* (ή *περισσοτέρων*) *μεταβλητών με ένα επίπεδο* (ή *υπερεπίπεδο αντίστοιχα*) ή *με μια τετραγωνική μορφή κοντά σε ένα σημείο* $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Τα *αναπτύγματα είναι τα παρακάτω*:

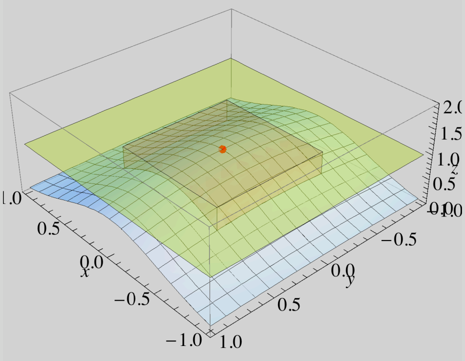
$$f(\vec{x}) \cong L(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}),$$

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f^T(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!} (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \nabla^2 f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})^{\mathrm{T}}.$$

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τη προσέγιση δύο συναρτήσεων (*μπλε χρώμα*) *με* (*α*) *ένα επίπεδο*, (*β*) *μια τετραγωνική μορφή*. *Στο σχήμα* (*γ*) *φαίνεται το σφάλμα που προκύπτει αν προσεγγίσουμε μια συνάρτηση με ένα επίπεδο* "*κοντά*" *σε ένα σημείο*.



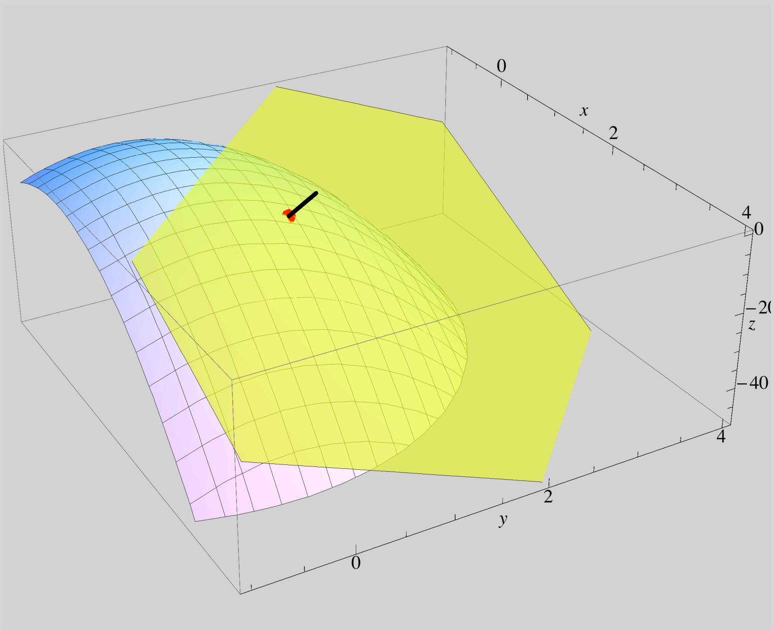




7. Ιδιότητες του ανάδελτα (Ι)

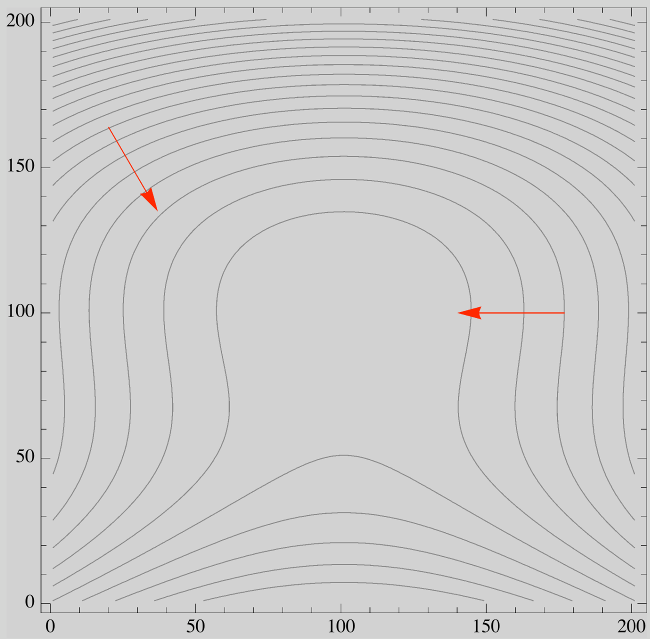
Αν μια συνάρτηση έχει όλες τις μερικές παραγώγους σε ένα σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$ *του πεδίου ορισμού της, τότε με τη βοήθεια του διανύσματος* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ *μπορούμε να ορίσουμε ένα επίπεδο* ***εφαπτόμενο*** *της* f *στο* $\vec{a}$. *Συγκεκριμένα το διάνυσμα* $\left(\vec{\nabla} f(x_0, y_0), -1\right)$ *ορίζει ένα τέτοιο επίπεδο. Το επίπεδο αυτό έχει αναλυτικό τύπο:*

$$z = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}).$$



7. *Ιδιότητες του ανάδελτα* (II)

Το διάνυσμα $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ *έχει άλλη μια πολύ σημαντική ιδιότητα. Σε κάθε σημείο δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία η συνάρτηση έχει τη* ***μεγαλύτερη δυνατή αύξηση****. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ισοσταθμικές μιας συνάρτησης. καθώς και το διάνυσμα* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ *σε δύο διαφορετικά σημεία του πεδίου ορισμού της. Παρατηρείστε ότι το διάνυσμα είναι κάθετο προς την εφαπτόμενη της ισοσταθμικής καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο.*



8. Γενίκευση

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι όλα όσα αναφέραμε γενικεύονται σε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών με όμοιο τρόπο.

Στην περίπτωση N μεταβλητών το ανάδελτα ορίζεται ως εξής:

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(f_{x_1}(x_0, y_0),\ f_{x_2}(x_0, y_0),\ \ldots,\ f_{x_N}(x_0, y_0)\right)$$

ενώ ο Εσσιανός πίνακας είναι:

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_N} \\ . & . & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N\, \partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_N}^2} \end{pmatrix} (x_0, y_0)$$

9. Βελτιστοποίηση (I)

Όπως είχαμε δει στις μελέτη των συνατήσεων μιας μεταβλητής, οι διαφορίσιμες συναρτήσεις ήταν πολύ χρήσιμες στην επίλυση προβλημάτων ***βελτιστοποίησης****.*

Λόγω συνέχειας γνωρίζουμε ότι σε κλειστά διαστήματα παίρνουν και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λόγω διαφορισιμότητας γνωρίζουμε ότι τα ακρότατα εμφανίζονται σε συνοριακά σημεία ή σε εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού, στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος.

Ξέρουμε επίσης ότι η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ *δεν συνεπάγεται πάντα την ύπαρξη ακρότατου. Σε τέτοια σημεία η συνάρτηση ενδέχεται π.χ. να έχει σημείο καμπής. Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει σε ένα τέτοιο σημείο μελετώντας τη συμπεριφορά των παραγώγων ανώτερης τάξης της συνάρτησης.*

9. Βελτιστοποίηση (ΙΙ)

*Οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών παρουσιάζουν **παρόμοια συμπεριφορά**.*

Οι συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών παίρνουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές σε κλειστά και φραγμένα πεδία ορισμού.

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών μπορεί να εμφανίζει ακρότατα μόνο σε συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της ή σε εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου και οι δύο πρώτες μερικές παράγωγοι μηδενίζονται ή όπου μια τουλάχιστον εκ των δύο παραγώγων δεν υπάρχει.

Και πάλι όμως ο μηδενισμός των πρώτων παραγώγων σε εσωτερικό σημείο δε συνεπάγεται αναγκαστικά την ύπαρξη ακρότατου σε αυτό το σημείο.

◄ | ►

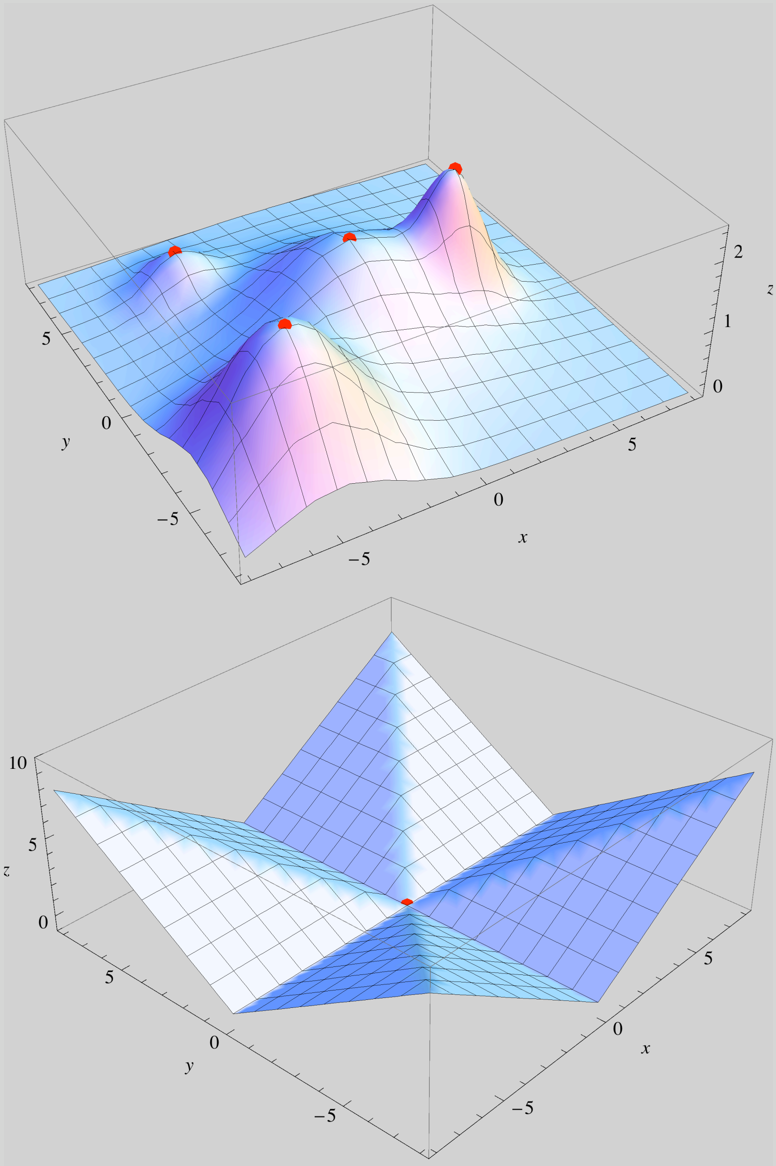
10. Ακρότατα - Ορισμός

Έστω $f(x, y)$ ορισμένη σε περιοχή R που περιέχει το σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Στην περίπτωση αυτή:

1. Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $\vec{a}$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία (x, y) του R που ανήκουν σε ένα ανοικτό δίσκο κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας ε, ισχύει η σχέση $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

2. Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $\vec{a}$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία (x, y) του R που ανήκουν σε ένα ανοικτό δίσκο κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας ε, ισχύει η σχέση $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Τα παρακάτω σχήματα είναι ενδεικτικά. Στο αριστερό σχήμα έχουμε 4 σημεία τοπικών μεγίστων, ενώ στο δεξιό έχουμε άπειρα σημεία τοπικού ελαχίστου.



2
1
0
z
5
0
y
−5
−5
0
5
x
10
5
0
z
5
0
y
−5
−5
0
5
x

11. Ακρότατα - Κριτήριο Fermat παράγωγος 1ης τάξης (I)

Θεώρημα

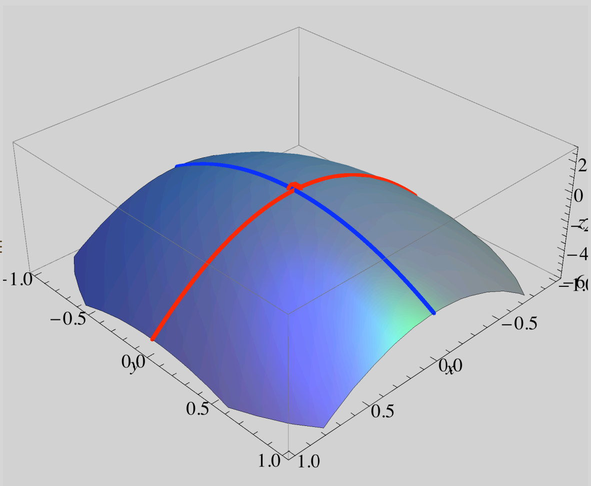
Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι, τότε ισχύει η σχέση

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0.$$

Δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\vec{a}$ είναι παράλληλο με το επίπεδο $x - y$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ τοπικό μέγιστο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x, y_0)$ (κόκκινη γραμμή). Η g παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό μέγιστο. Άρα από το γνωστό θεώρημα του Fermat για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής προκύπτει ότι $f_x(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0$. Θεωρώντας τη συνάρτηση $h(y) = f(x_0, y)$ (μπλε γραμμή) και ακολουθώντας τα ίδια βήματα αποδεικνύουμε ότι $f_y(x_0, y_0) = 0$. Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι παρόμοια.



11. Ακρότατα - Κριτήριο Fermat παράγωγος 1ης τάξης (II)

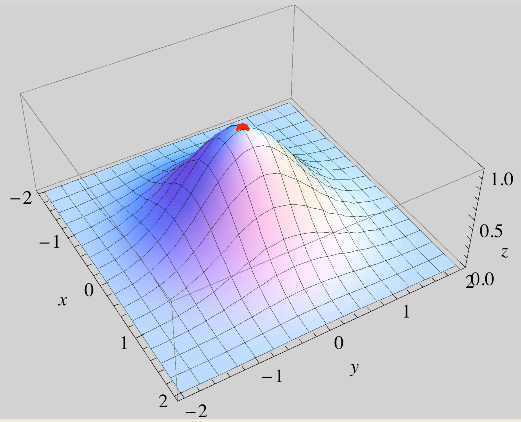
Όπως ισχύει για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι τα μόνα σημεία όπου μια συνάρτηση $f(x, y)$ μπορεί ποτέ να εμφανίσει ακρότατα είναι:

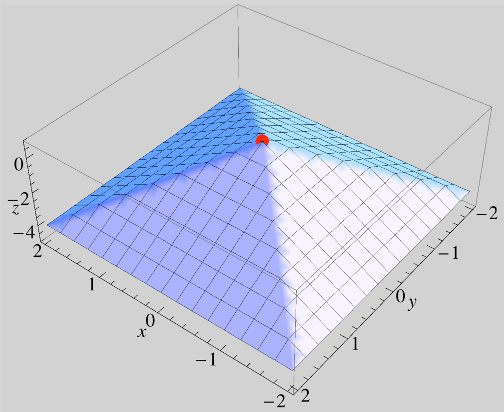
1. Εσωτερικά *σημεία στα οποία ισχύει η σχέση* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$. (*βλέπε* Σχήμα *α*, $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$)

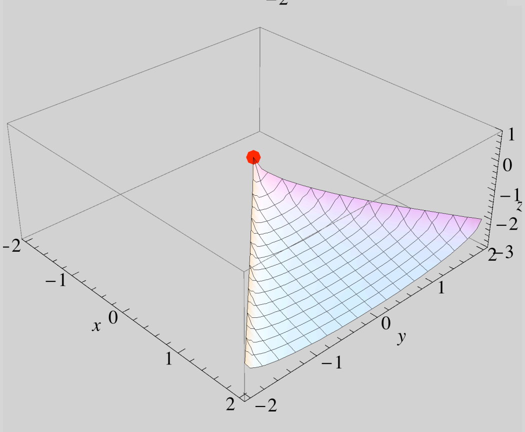
2. Εσωτερικά *σημεία όπου μία τουλάχιστον εκ των μερικών παραγώγων δεν υπάρχει.*
(*βλέπε* Σχήμα b, $f(x, y) = |x-y| + |x+y|$)

3. *Συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.* (*βλέπε* Σχήμα c, $f(x, y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}$)

Τα σημεία των δύο πρώτων κατηγοριών ονομάζονται ***κρίσιμα σημεία.***







(α) (b)

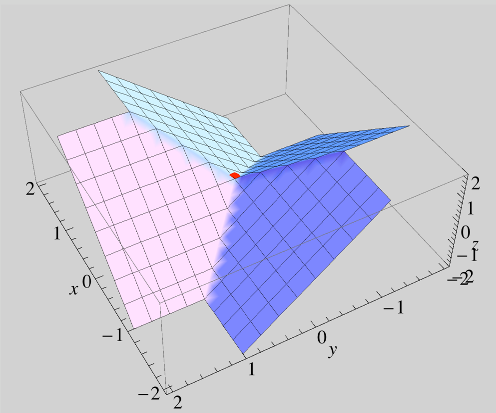
(c)

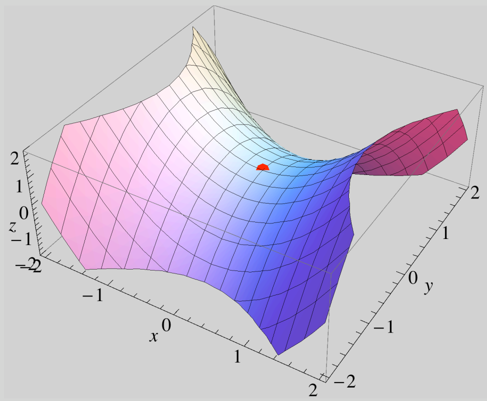
12. *Σαγματικά Σημεία* (saddle points)

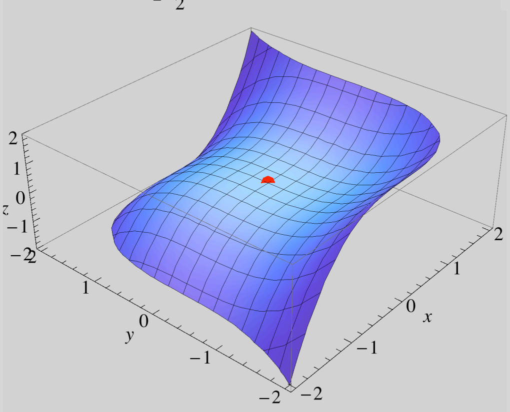
Όπως έχουμε ήδη τονίσει, κάθε κρίσιμο σημείο δεν είναι αναγκαστικά σημείο τοπικού ακροτάτου. Έτσι έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Θα λέμε ότι σε ένα κρίσιμο σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$ *η* f *παρουσιάζει* ***σαγματικό σημείο,*** *αν σε κάθε ανοιχτό κυκλικό δίσκο με κέντρο το* $\vec{a}$ *υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της* f *όπου* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ *και σημεία του πεδίου ορισμού όπου* $f(x, y) < f(x_0, y_0)$*. Το σημείο* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *ονομάζεται σαγματικό σημείο* (saddle point).

Τρεις *συναρτήσεις που εμφανίζουν σαγματικά σημεία στο* (0,0). *Στο σχήμα* (a) *εμφανίζεται η συνάρτηση* $f(x, y) = -|x - y| + |x + y|$, *στο* (b) *η* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *και στο* (c) *η* $f(x, y) = x^3/2 - y^3/4$.







(a) (b)
(c)

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου (I)

Πριν αναπτύξουμε το θεώρημα πρέπει να δώσουμε κάποιους ορισμούς που αφορούν πίνακες.

Ένας συμμετρικός πίνακας A διαστάσεων $N \times N$ ονομάζεται
θετικά ορισμένος, όταν ισχύει $u\,A\,u^T > 0$, για κάθε $u \neq 0$,
αρνητικά ορισμένος, όταν ισχύει $u\,A\,u^T < 0$, για κάθε $u \neq 0$,
αόριστος, όταν υπάρχουν u και v τέτοια ώστε: $u\,A\,u^T > 0$, $v\,A\,v^T < 0$.

Έστω ένας πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Ισχύουν τα εξής:

1. Ο A είναι **θετικά ορισμένος**, αν και μόνο αν $a > 0$ και $a\,c - b^2 > 0$.
2. Ο A είναι **αρνητικά ορισμένος**, αν και μόνο αν $a < 0$ και $a\,c - b^2 > 0$.

Τα παραπάνω είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Sylvester.

◄ | ►

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου (II)

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και 2ης τάξης σε όλο το ανοικτό πεδίο ορισμού. Έστω επίσης ένα κρίσιμο σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Ισχύουν τα εξής:

1. Αν ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ είναι ***θετικά ορισμένος***, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό ελάχιστο***.

2. Αν ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ είναι ***αρνητικά ορισμένος***, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό μέγιστο***.

3. Αν ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ είναι ***αόριστος***, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***σαγματικό σημείο***.

4. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το $\vec{a}$.

Με βάση αυτά που αναφέραμε για τους συμμετρικούς πίνακες (θεώρημα Sylvester) οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής:

1. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό ελάχιστο***.

2. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό μέγιστο***.

3. Αν $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***σαγματικό σημείο***.

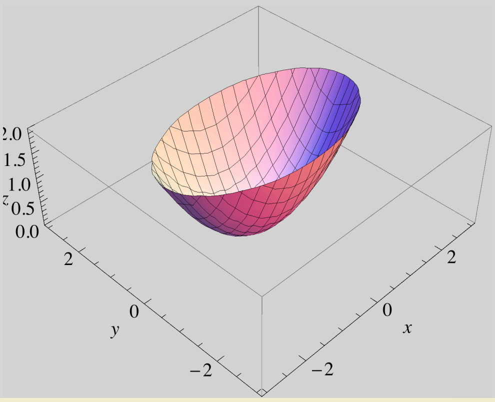
4. Αν $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το $\vec{a}$.

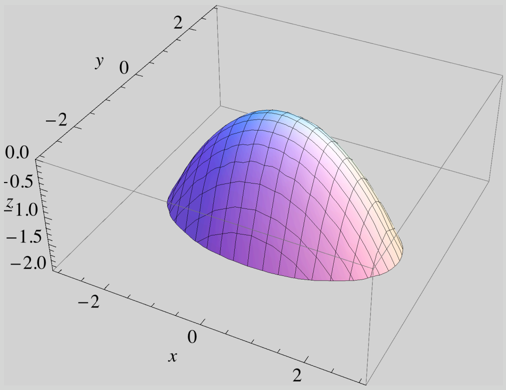
13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Απόδειξη (ΙΙΙ)

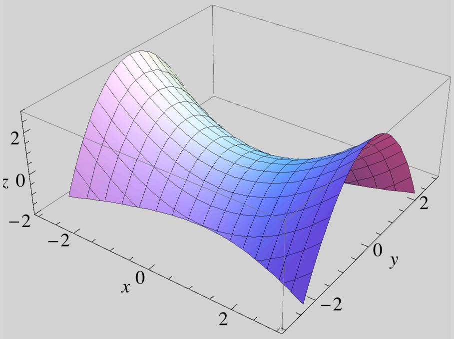
Δεν θα δώσουμε μια ολοκληρωμένη απόδειξη, αλλά θα αναφέρουμε την ***βασική ιδέα*** *της απόδειξης. Καταρχήν, πρέπει να αναφερθούμε σε μερικά στοιχεία της* ***αναλυτικής γεωμετρίας***.

Η *συνάρτηση* $f(\vec{x}) = \vec{x}\, A\, \vec{x}^T$, όπου $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *ένας συμμετρικός* 2 *επί* 2 *πίνακας, είναι ένα πραβολοειδές που μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Συγκεκριμένα*:

Αν ο A *είναι* ***θετικά ορισμένος***, *τότε η* f *είναι ένα* **κυρτό ελλειπτικό παραβολοειδές** όπως *φαίνεται στο σχήμα* (*α*).
Αν ο A *είναι* ***αρνητικά ορισμένος***, *τότε η* f *είναι ένα* **κοίλο ελλειπτικό παραβολοειδές** όπως *φαίνεται στο σχήμα* (*β*).
Αν ο A *είναι ικανοποιεί την* $a\,c - b^2 < 0$, *τότε η* f *είναι ένα* **υπερβολικό παραβολοειδές** όπως *φαίνεται στο σχήμα* (*γ*).







(α) (β)

(γ)

◀ | ▶

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Απόδειξη (IV)

Ας θυμηθούμε τώρα την προσέγγιση κατά **Taylor** *της συνάρτησης* f *στο σημείο* $\vec{a} = (x_0, y_0)$, *μέχρι και τον* ***δεύτερο όρο***.

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f^T(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!} (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \nabla^2 f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})^{\mathrm{T}}.$$

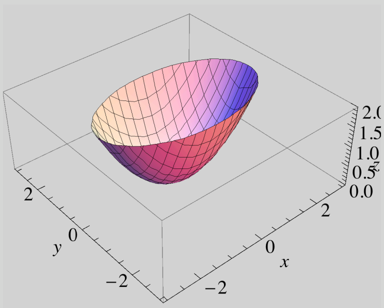
Επειδή στο σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$ *έχουμε τοπικό ακρότατο θα ισχύει το κριτήριο* 1*ης τάξης* (Fermat), *δηλαδή* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$. *Επομένως η συνάρτηση* f *μπορεί να προσεγγισθεί (κοντά στο* $\vec{a}$*) από μια τετραγωνική μορφή:*

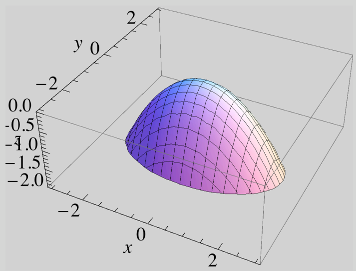
$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{a}) + \frac{1}{2!} (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \nabla^2 f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})^{\mathrm{T}}.$$ Επομένως:

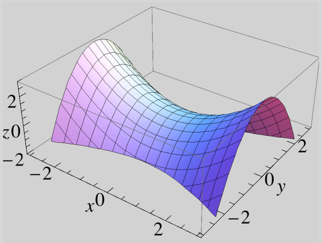
1. *Αν* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *και* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) > 0$, *τότε ο πίνακας* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *(δηλαδή η* Εσσιανή *της* f*) είναι θετικά ορισμένος και επομένως η* f *προσεγγίζεται κοντά στο* $\vec{a}$ *με ένα* ***κυρτό ελλειπτικό παραβολοειδές.*** *Άρα η* f *παρουσιάζει στο* $\vec{a}$ ***τοπικό ελάχιστο.***

2. *Αν* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *και* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) > 0$, *τότε ο πίνακας* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *είναι αρνητικά ορισμένος και επομένως η* f *προσεγγίζεται κοντά στο* $\vec{a}$ *με ένα* ***κοίλο ελλειπτικό παραβολοειδές.*** *Άρα παρουσιάζει στο* $\vec{a}$ ***τοπικό μέγιστο.***

3. *Αν* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) < 0$, *τότε ο πίνακας* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *είναι αόριστος και η* f *προσεγγίζεται κοντά στο* $\vec{a}$ *με ένα* ***υπερβολικό παραβολοειδές.*** *Άρα η* f *παρουσιάζει στο* $\vec{a}$ ***σαγματικό σημείο.***







(α) (β)

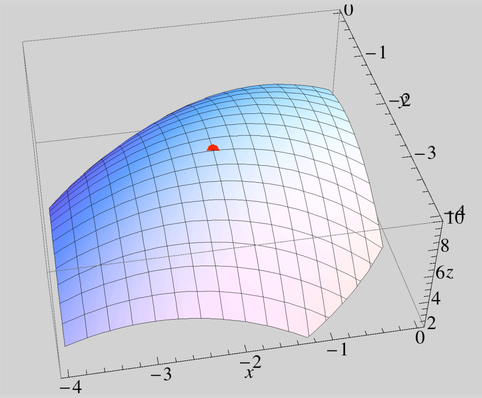
(γ)

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (V)

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x\,y - x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y + 4$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται και είναι διαφορίσισμη για κάθε x και y και το πεδίο ορισμού της δεν έχει συνοριακά σημεία, ακρότατα θα εφανίζονται μόνο σε σημεία που πληρούν το κριτήριο της 1ης παραγώγου:
$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$.

Έτσι παίρνουμε δύο εξισώσεις:
$f_x(x, y) = y - 2\,x - 2 = 0$, και $f_y(x, y) = x - 2\,y - 2 = 0$, από τις οποίες προκύπτει ότι $x = y = -2$.
Συνεπώς το (-2,-2) είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο ενδέχεται να υπάρχει ακρότατο. Για να δούμε τί τελικά συμβαίνει υπολογίζουμε και τις παραγώγους 2ης τάξης: $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$, $f_{xy}(x, y) = 1$.
Επομένως έχουμε $f_{xx}(-2, -2)\, f_{yy}(-2, -2) - f_{xy}{}^2(-2, -2) = 3 > 0$ και $f_{xx}(-2, -2) < 0$.
Αυτό σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο (-2,-2) με $f(-2, -2) = 8$.



13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (VI)

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = \mathrm{xy}$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται και είναι διαφορίσιμη για κάθε x και y και το πεδίο ορισμού της δεν έχει συνοριακά σημεία, ακρότατα θα εφανίζονται μόνο σε σημεία που πληρούν το κριτήριο της 1ης παραγώγου:

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$.

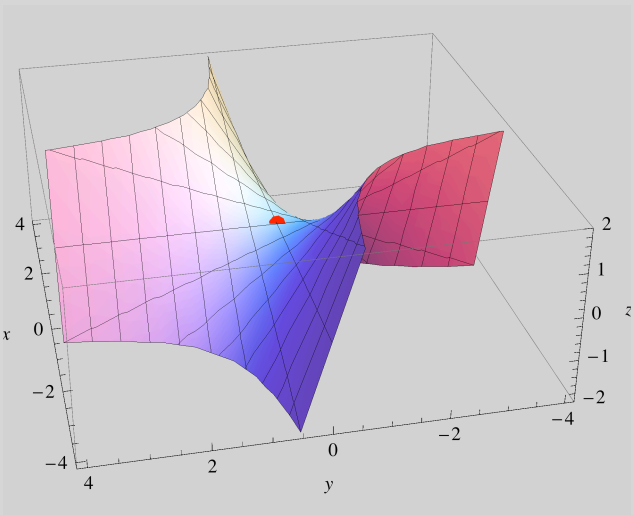
Έτσι παίρνουμε δύο εξισώσεις:

$f_x(x, y) = y = 0$, και $f_y(x, y) = x = 0$, από τις οποίες προκύπτει ότι $x = y = 0$.

Συνεπώς το (0,0) είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο ενδέχεται να υπάρχει ακρότατο. Για να δούμε τί τελικά συμβαίνει υπολογίζουμε και τις παραγώγους 2ης τάξης: $f_{\mathrm{xx}}(x, y) = 0$, $f_{\mathrm{yy}}(x, y) = 0$, $f_{\mathrm{xy}}(x, y) = 1$.

Επομένως έχουμε $f_{\mathrm{xx}}(0, 0)\, f_{\mathrm{yy}}(0, 0) - f_{\mathrm{xy}}{}^2(0, 0) = -1 < 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η f παρουσιάζει σαγματικό σημείο στο (0,0). Το σαγματικό σημείο είναι το (0,0,0).



13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (VIIα)

Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, *στο τριγωνικό χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου, που περικλείεται από τις ευθείες* $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$.

Τα μόνα πιθανά σημεία τοπικών ακρότατων είναι εκείνα στο εσωτερικό του τριγώνου όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι και τα συνοριακά σημεία.

Εσωτερικά σημεία

$f_x(x, y) = 2 - 2x = 0$, $f_y(x, y) = 2 - 2y = 0$. *Άρα ένα υποψήφιο σημείο είναι το* (1,1). Η *τιμή της* f *σε αυτό το σημείο είναι* 4. Επίσης, *έχουμε*: $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$, $f_{xy}(x, y) = 0$. Επομένως $f_{xx}(1, 1) = -2 < 0$ *και*

$f_{xx}(1, 1)\, f_{yy}(1, 1) - f_{xy}{}^2(1, 1) = 4 > 0$. *Άρα στο* (1,1) *έχουμε τοπικό μέγιστο.*

Συνοριακά σημεία - Ερευνούμε *μία προς μία τις πλευρές του τριγώνου.*

1. *Για* $\boldsymbol{y = 0}$**.**

Η *συνάρτηση* $g_1(x) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$, *μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση μιας μεταβλητής ορισμένη στο* [0,9]. Τα *ακρότατά της μπορούν να προκύψουν από τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου και από τα συνοριακά της σημεία:*

Για x=0 *έχουμε* $g_1(0) = f(0, 0) = 2$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για x=9 *έχουμε* $g_1(9) = f(9, 0) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για x=1, *έχουμε* $g_1'(1) = 0$, $g_1(1) = f(1, 0) = 3$, *τοπικό μέγιστο.*

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (VIIβ)

2. Για x=0, *η συνάρτηση* $g_2(y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$, *μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση μιας μεταβλητής ορισμένη στο* [0,9]. *Τα ακρότατά της μπορούν να προκύψουν από τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου και από τα συνοριακά της σημεία*:

Για y=0 *έχουμε* $g_2(0) = f(0, 0) = 2$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για y=9 *έχουμε* $g_2(9) = f(0, 9) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για y=1, *έχουμε* $g_2'(1) = 0$, $g_2(1) = f(0, 1) = 3$, *τοπικό μέγιστο.*

3. Για την ευθεία $\boldsymbol{y = 9 - x}$, $x \in [0, 9]$, *έχουμε τη συνάρτηση* $g_3(x) = f(x, 9 - x) = -61 + 18x - 2x^2$, *μιας μεταβλητής ορισμένη στο* [0,9].

Για x=0, *έχουμε* $g_3(0) = f(0, 9) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για x=9, *έχουμε* $g_3(9) = f(9, 0) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

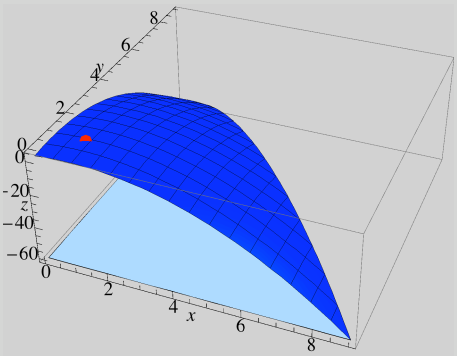
Για x=9/2, *έχουμε* $g_3'(9/2) = 0$, $g_3(9/2) = f(9/2, 9/2) = -41/2$, *τοπικό μέγιστο.*

Συνοψίζοντας:

Στο (0,0) *έχουμε τοπικό ελάχιστο.*

Στο (9,0) *έχουμε τοπικό-ολικό ελάχιστο. Στο* (0,9) *έχουμε τοπικό-ολικό ελάχιστο.*

Στο (1,1) *έχουμε τοπικό-ολικό μέγιστο.*



◄ | ►

14. *Γενίκευση* - *Θεώρημα* Sylvester (I)

Τα θεωρήματα που αναφέραμε παραπάνω ισχύουν και για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Ειδίκοτερα, *για το* ***θεώρημα της παραγώγου*** **2ης** ***τάξης***, *δίνουμε την ακριβή διατύπωση του* Θεωρήματος *του* Sylvester.

Έ*στω* A *ένας συμμετρικός πίνακας* Ν *απί* Ν.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & \ldots & a_{2,N} \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & \ldots & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

Ο*ρίζουμε ως* ***υποορίζουσα k τάξης*** *του* A *την ορίζουσα*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & \ldots & a_{2,k} \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & \ldots & a_{k,k} \end{vmatrix}.$$

Γ*ια παράδειγμα*:

$$\Delta_1 = |\ a_{1,1}\ |,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix},\ \ldots$$

14. Γενίκευση - Θεώρημα Sylvester (II)

Θεώρημα (Sylvester) Χαρακτηρισμός θετικά ορισμένων πινάκων
Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας N επί N.

Ισχύουν τα παρακάτω:

1. Ο A είναι ***θετικά ορισμένος***, αν και μόνο αν ισχύει: $\Delta_k > 0,\ 1 \leq k \leq N$.

2. Ο A είναι ***αρνητικά ορισμένος***, αν και μόνο αν ισχύει: $(-1)^k\,\Delta_k > 0$, $1 \leq k \leq N$.
Δηλαδή $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ...

3. Ο A είναι ***αόριστος*** αν και μόνο αν
είτε υπάρχει κάποιο k **άρτιο** ώστε $\Delta_k < 0$,
είτε $\Delta_k \neq 0$, $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}$ και το σύνολο $\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \Delta_3/\Delta_2, \ldots, \Delta_\mathrm{N}/\Delta_{\mathrm{N}-1}$ περιέχει θετικά και αρνητικά στοιχεία.

◄ | ►

15. Γενίκευση - Παραδείγματα (I)

Βρείτε τα σημεία τοπικών ακρότατων και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

Η συνάρτηση αυτή έχει προφανώς συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης (και μεγαλύτερης τάξης). Έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 - 6x$, $f_y(x, y) = 2y$, $f_{xx}(x, y) = 6x - 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 2$.

Από το κριτήριο Fermat $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$, *έχουμε το σύστημα* $3x^2 - 6x = 0$, $2y = 0$, *το οποίο έχει τις λύσεις* (0,0) *και* (2,0). *Μελετώντας τις υποορίζουσες του Εσσιανού πίνακα έχουμε τα εξής αποτελέσματα*:

Για το (0,0), $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$, *άρα το* (0,0,0) *είναι σαγματικό σημείο.*

Για το (2,0), $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$, *άρα το* (2,0) *είναι τοπικό ελάχιστο.*

15. Γενίκευση - Παραδείγματα (II)

Βρείτε τα σημεία τοπικών ακρότατων και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 3x$.

Η συνάρτηση αυτή έχι προφανώς συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης (και μεγαλύτερης τάξης). Συγκεκριμένα έχουμε: $f_x(x, y, z) = 3x^2 - 3$, $f_y(x, y, z) = 2y$, $f_x(x, y, z) = 2z$, $f_{xx}(x, y, z) = 6x$, $f_{xy}(x, y, z) = 0$, $f_{xz}(x, y, z) = 0$, $f_{yz}(x, y, z) = 0$, $f_{yy}(x, y, z) = 2$, $f_{zz}(x, y, z) = 2$.

από το κριτήριο Fermat παίρνουμε το σύστημα $3x^2 - 3 = 0$, $2y = 0$, $2z = 0$, το οποίο μας δίνει τις λύσεις (1,0,0) και (-1,0,0). Έτσι λοιπόν θα έχουμε:

Για το (1,0,0) $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$, $\Delta_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 24 > 0$, άρα το (1,0,0) είναι τοπικό ελάχιστο.

για το (-1,0,0) $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$, $\Delta_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -24 < 0$, άρα το (-1,0,0,2) είναι σαγματικό σημείο.