

Ασκήσεις (συνέχεια)

2) $f(x) = \eta\mu x$, $x_0 = 0$

(i) Να γραφεί το πολ. Taylor, υπόλ. Taylor

(ii) Αποδείξτε ότι ~~$\eta\mu x \neq$~~

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iii) Να ερευνηθεί προσέγγιση του $\eta\mu(0, 2)$ με χρήση πολ. Taylor 3-βάθμης και εκτίμηση του σφάλματος.

$$T_{n, x_0=0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \eta\mu x, \quad f(0) = 0 \\ f'(x) = \sigma\upsilon\upsilon x, \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\eta\mu x, \quad f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\sigma\upsilon\upsilon x, \quad f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \eta\mu x, \quad f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = f'(x) \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} f^{(2n)}(0) = 0 \\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$T_{2n+2,0}(x) = T_{2n+1,0}(x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{0 \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$R_{2n+2,0}(x) = \frac{\eta^{(2n+3)}(\xi x)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

για κάποιο ξx μεταξύ του $x_0 = 0$, x

ii) Αρκεί $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+2,0}(x) = 0$ λόγω διότι

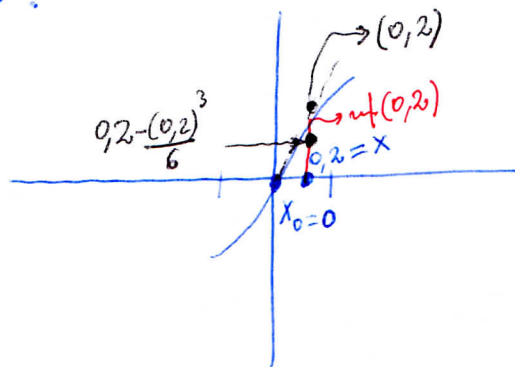
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

iii) $T_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $R_{3,0}(x) = \frac{\eta^{(5)}(\xi x)}{5!} x^5$

Προσέγγιση: $(0,2) - \frac{(0,2)^3}{6} \approx \eta(0,2)$

$$|R_{3,0}(0,2)| \leq \frac{(0,2)^5}{5!} < 0,000003$$



3) Γεωμ. σειρά

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ για } x \in (-1, +1)$$

Μερικό άθροισμα:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$xS_n = x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1}$$

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \text{ για } x \in (-1, +1)$$

$$\text{Άρα } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \dots + x^n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

για $x \in (-1, +1)$

Χρησιμα θεωρηματα

$$\text{Εστω } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-r, +r)$$

$\forall n, |x| < r$

($r \in (0, +\infty)$) $r = +\infty$)

(επιφυσια σιγουδιoms
της δυναμοσειρας)
 $\sum a_n x^n$

Τοτε
ισχυουν τα εψης:

$$\begin{aligned} 1) f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)' \\ &= a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{για } |x| < r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \\ &= \int_0^x (a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots) dt = \\ &= a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < r \end{aligned}$$

4) Αποδείξετε ότι

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

α' τρόπο : Ορίζουμε $f(x) = \cos x$

β' τρόπο : ημ $x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

δευτερογενής $\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

5) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Για $x \in (-1, +1)$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad t \in (-1, +1)$$

$\frac{1}{2n!} \cdot \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
(απόδειξη με τη μέθοδο του Abel και τη σειρά Euler)

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

δευτ. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, +1)$

$$6) \text{ τοξεφ} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

$$x \in (-1, 1)$$

Ξημ. : λοχίει και για $x=1$, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (\text{Τύπος Leibnitz-6})$$

$$\text{τοξεφ} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \dots \text{ σίγουρα παρ'}$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n dt \stackrel{\text{Θεώρ.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, +1)$$

$$7) \underline{a \in \mathbb{R}} \quad (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad \text{για } x \in (-1, +1)$$

Διωνυμική σειρά

$$(\text{π.χ. } \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n, \quad x \in (-1, +1))$$

(Απόδειξη: Βιβλιογραφία ή ΔV I, Υμκό 2002-2009 σφ. Τα)

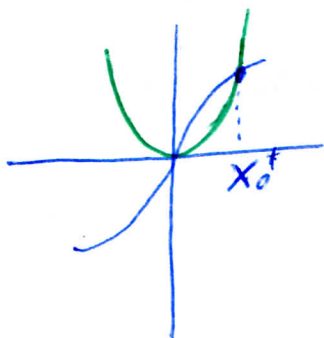
$$\underline{a \in \mathbb{R}} \quad \binom{a}{n} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!}$$

Μερικές Εφαρμογές του πολ. Taylor

Ⓐ Εύρεση ριζών κατά προσέγγιση

Παράδειγμα

Να ευρεθεί κατά προσέγγιση μη μηδενική ρίζα x_0^* της εξίσωσης $\eta\mu x = x^2$ με χρήση πολ. Taylor 3ου βαθμού και εκτίμηση $|\eta\mu x_0 - x_0^2|$



$$\eta\mu x \approx x - \frac{x^3}{6} = T_{3,0}(x)$$

προσέγγιση της ρίζας:

$$x_0 - \frac{x_0^3}{6} = x_0^2, \quad x_0 = \sqrt{15} - 3 < 1$$

$$\eta\mu x_0 = x_0 - \frac{x_0^3}{6} + R_{3,0}(x_0) \Rightarrow |\eta\mu x_0 - x_0^2| \leq \frac{(\sqrt{15}-3)^5}{5!} < \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

ⓑ Υπολογισμός και προσέγγιση
 της σταθεράς ορισμένης ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt, \int_0^1 \eta_{\mu}(t^2) dt, \int_0^1 \frac{\eta_{\mu x}}{x} dx, \dots$$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 2!} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 2!} - \dots$$

α.χ. για $n=4$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 2!} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 2 \cdot 4!}$$

$$\approx 0,4613 \dots$$

Σφάλμα: $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{e^{+t^2}}{5!} t^{10} + \dots$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} e^{-t^2} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2^7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 2^9 \cdot 4!} - \int_0^{1/2} \frac{e^{+t^2}}{5!} t^{10} dt$$

$$0 < \xi = \int_0^{1/2} \frac{e^{t^2}}{5!} t^{10} dt < \int_0^{1/2} \frac{t^{10}}{5!} dt = \frac{1}{11 \cdot 2^{11} \cdot 5!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

Άρα το $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ προσεγγίζεται από την τιμή 0,4613
 με σφάλμα μικρότερο του $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$

Γ ** Εντοπισμός Ακροτάτων

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), x_0 = \text{κρίσιμο σημείο}$
 δηλ. $f'(x_0) = 0$

Εστω

$f''(x) \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. ελάχ.} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. μέγιστο} \end{array} \right.$

• $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$

$f^{(4)}(x_0) \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. ελ.} \\ f^{(4)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. μέγ.} \end{array} \right.$

⋮

$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$

και $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} f^{(2n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. ελ.} \\ f^{(2n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. μέγ.} \end{array} \right.$

• Εάν $f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$,

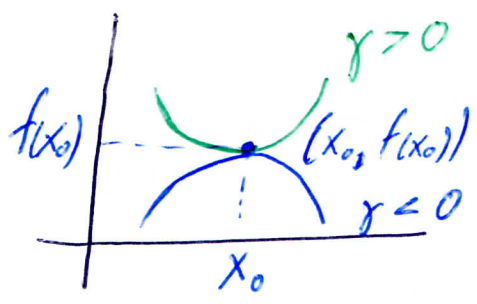
$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 = \text{σημείο καμπής.}$

$x \cong x_0$

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 = \gamma \neq 0$

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \gamma(x-x_0)^2$

(= παραβολή $\gamma \neq 0$)



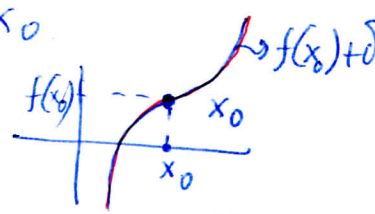
Άρα: για $x \cong x_0$ και $f(x) \cong$ παραβολή
αν $\gamma > 0$ και παραβολή έχει εφάξια
στο x_0 , το ίδιο θα έχει και η f

$f(x) \cong f(x_0) + \gamma(x-x_0)^{2n}$

π.χ. (μόνοι μας) $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(2n)}(0) = 0$
 $f(x) = x \cos x - \eta \eta^2 x$ $f^{(6)}(0) > 0$
 $x_0 = 0$. Τι ακριβώς είναι;

Εάν $f(x) \cong f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}$
 $f(x) \cong f(x_0) + \delta(x-x_0)^{2n+1}$ δεν το
 x_0 είναι σ. κλίσης, το ίδιο θα έχ
και η f στο x_0

Δ) Ανισοτικές σχέσεις



Παραδείγματα

1) $|\eta \eta x - x| \leq \frac{1}{6000}$ για $|x| \leq \frac{1}{10}$: $(\psi x = x - \frac{\eta^3}{3!} x^3)$

2) $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{1}{24}$, $|x| \leq 1$ ($\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cos^{(4)}(\xi)}{4!} x^4$)

Ε) Επίλυση Δ. Ε.

Για Σχήματα: Μάθημα 16 → Γ)