Μάθημα 16 (01/04/2011)

Πολυώνυμο Taylor, Τύπος Taylor για συναρτήσεις 1 και 2 μεταβλητών

(I) Έστω πολυώνυμο $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ βαθμού $\leq n$.

$P(0) = \alpha_0$

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots + n\alpha_n x^{n-1}$$

$$P''(x) = 2\alpha_2 + 2\cdot 3\alpha_3 x + \dots + (n-1)n\alpha_n x^{n-2}$$

$$P'''(x) = 2\cdot 3\alpha_3 + 2\cdot 3\cdot 4\alpha_4 + \dots + (n-2)(n-1)n\alpha_n x^{n-3}$$

$\vdots$

$$P^{(n)}(x) = 1\cdot 2 \cdots (n-2)(n-1)n\,\alpha_n$$

$(P^{(k)}(x) = 0 \quad, k = n+1, n+2, \dots)$

$P(0) = \alpha_0$, $P'(0) = 1!\,\alpha_1$, $P''(0) = 2!\,\alpha_2$, $P'''(0) = 3!\,\alpha_3$, $\vdots$, $P^{(n)}(0) = n!\,\alpha_n$.

Άρα
$$\boxed{P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n} \quad x \in \mathbb{R}.$$

• Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $P(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n$

Ανάλογα έχουμε ότι: $P(x_0) = b_0$, $P'(x_0) = 1!\,b_1$, $P''(x_0) = 2!\,b_2$, …, $P^{(n)}(x_0) = n!\,b_n$

Άρα
$$\boxed{P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \quad x \in \mathbb{R}.$$

· Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει n-τάξης παραγώγους και $x_0\in(\alpha,\beta)$

Το πολυώνυμο $T_{n,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

έχει συντελεστές $b_0=f(x_0)$, $b_1=\frac{f'(x_0)}{1!}$, $b_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$, $\dots$, $b_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

άρα

$$T_{n,x_0}(x_0)=b_0=f(x_0)$$
$$T'_{n,x_0}(x_0)=1!\,b_1=f'(x_0)$$
$$T''_{n,x_0}(x_0)=2!\,b_2=f''(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T^{(n)}_{n,x_0}(x_0)=n!\,b_n=f^{(n)}(x_0)$$

δηλαδή το T_{n,x_0} έχει ίδια τιμή στο $x=x_0$ με την f και ίδιες παραγώγους στο $x=x_0$ με την f. *

Το πολυώνυμο $T_{n,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ καλείται πολυώνυμο Taylor (MacLaurin αν $x_0=0$), n-βαθμού, της f στο x_0.

Το $R_{n,x_0}(x)=f(x)-T_{n,x_0}(x)$ καλείται υπόλοιπο Taylor (MacLaurin αν $x_0=0$) της f στο x_0.

Έχουμε ότι :

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n,x_0}(x)}$$

Ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$, δηλ. το $R_{n,x_0}(x)$ είναι "μικρό" για x "κοντά" στο x_0, σε σχέση με το $T_{n,x_0}(x)$

(Για $n=1$, ισχύει από τον ορισμό της παραγώγου. Για $n\geq 2$ αποδεικνύεται επαγωγικά με την χρήση κανόνα L'Hospital)

→ Μπορούμε να έχουμε μια κάποια έκφραση του R_{n,x_0} συναρτήσει της f ;;

Εάν $n=0$ ξέρουμε ότι $f(x)=f(x_0)+\underline{f'(c_x)(x-x_0)}$
$= T_{0,x_0}(x)+\underline{R_{0,x_0}(x)}$ (ΘΜΤ)

για κάποιο c_x μεταξύ των x, x_0, εφόσον υπάρχει η f' της f.
δηλ. το υπόλοιπο δίνεται με την βοήθεια της $n+1=0+1=1$ παραγώγου.

Για $n\geq 1$ ο B. Taylor (1685-1731) και ο MacLaurin (1698-1746) έδωσαν το εξής Θεώρημα:

Τύπος Taylor

Έστω $f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ που έχει $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ στο (α,b) και $x_0\in(\alpha,b)$.

Τότε $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)(x-x_0)^{n+1}$

για κάποιο c_x μεταξύ των x, x_0 (το c_x εξαρτάται και από το n)

Άρα, το $T_{n,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ αφήνει υπόλοιπο $R_{n,x_0}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)(x-x_0)^{n+1}$

Σημείωση: i) Η έκφραση αυτή του υπολοίπου είναι μορφής Lagrange. Υπάρχουν και οι εκφράσεις σε μορφή Cauchy και η ολοκληρωτική.
ii) Η απόδειξη του τύπου του Taylor γίνεται με το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής (του υπολοίπου Cauchy με το ΘΜΤ και του ολοκληρωτικού με το Θ.Θ.Α.Λ $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt$)

Σειρά Taylor (MacLaurin)

Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ με παραγώγους κάθε τάξης στο (α,β)

Τότε για $n\in\mathbb{N}$: $f(x)=T_{n,x_0}(x)+R_{n,x_0}(x)\Rightarrow$

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu}+R_{n,x_0}(x)\quad \left(f^{(0)}\equiv f,\ y^0=1\right)$$

Η f αναπτύσσεται στο x_0 σε σειρά Taylor (MacLaurin αν $x_0=0$)

αν $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu}$ για $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subseteq(\alpha,\beta)$ (για κάποιο $\varepsilon>0$)

Ισοδύναμα: $\lim_{n\to\infty}R_{n,x_0}(x)=0$ για $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

Σημείωση : Υπάρχουν συναρτήσεις π.χ $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$ και $f(0)=0$ (*) που έχουν παραγώγους κάθε τάξης ($f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=0$) αλλά δεν αναπτύσσονται σε σειρά Taylor.

Για την f αυτή (*) $T_{n,0}(x)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $f(x)\neq T_{n,0}(x)$ για κάθε $x\neq 0$ (δηλαδή δεν υπάρχει $\varepsilon>0$: $f(x)=0$ για κάθε $x\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$).

Σχήματα : Thomas 650-656, Η Τάξη (Πολ. Taylor),
http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series#Taylor_series_in_several_variables
http://mathdemos.gcsu.edu/mathdemos/TaylorPolynomials (ΜΕ animations)