Μάθημα 16 (01/04/2011) (Συνέχεια από το A) T5

## Ερωτήσεις

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρ/μη με πολ. Taylor 2ου βαθμού

$T_{2,0}(x)=3x^2$

Ποιες τιμές έχει $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$;

Απάντ.

$f(0)=T_{2,0}(0)=3\cdot 0=0$

$f'(0)=T'_{2,0}(0)=6\cdot 0=0$

$f''(0)=T''_{2,0}(0)=6$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T_{3,x_0=10}(x)=x^2+8x^3$. Ποιες τιμές έχει

$f(10)$, $f'(10)$, $f''(10)$, $f'''(10)$

$f(10)=T_{3,x_0=10}(10)=10^2+8\cdot 10^3$

$f'(10)=T'_{3,x_0=10}(10)=2\cdot 10+24\cdot 10^2$

$f''(10)=T''_{3,x_0=10}(10)=2+48\cdot 10$

$f'''(10)=T'''_{3,x_0=10}(10)=48$

3) Πως γράφεται το

$p(x) = x^2 - 4x - 9$ ως

$p(x) = b_2 (x-3)^2 + b_1 (x-3) + b_0$ ;

$b_0 = p(3) = -12$

$b_1 = \frac{p'(3)}{1!} = p'(3) = (2x-4)\Big|_{x=3} = 2$

$b_2 = \frac{p''(3)}{2!} = \frac{2}{2} = 1$. Άρα $\underline{x^2 - 4x - 9 = (x-3)^2 + 2(x-3) - 1}$

Ασκήσεις (Πολ. Taylor για τις $f(x) = e^x$, ημx, συνx, log(1+x) ...

1) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρεθεί το $T_{n,0}(x)$, $R_{n,0}(x)$

ii) Να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \quad (*)$$

(Αν. Taylor της εκθετικής)

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}} \quad (x=1 \text{ στην } (*))$$

iii) Να βρεθεί προσέγγιση του $e^{0,1}$ με πολυών. Taylor 3ου βαθμού

...

iv) Ν.δ.ο. $e \notin \mathbb{Q}$

Υπολ. προσέγγιση του $e$ με σφάλμα $< 10^{-5}$

Λύση

i) $$T_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

$f(x) = e^x$ , $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ , $f'(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = e^x$ , $f^{(n)}(0) = 1$

$$\boxed{T_{n,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

$R_{n,0}(x) = \dfrac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ για κάποιο $\xi_x$ μεταξύ των $x, 0$ (Το $\xi_x$ εξαρτάται και από το $n$

ii) Αρκεί $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$ , $x \in \mathbb{R}$

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Άρα: $e^x = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) + R_{n,0}(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x = \lim\limits_{n\to\infty} T_{n,0}(x) + \lim\limits_{n\to+\infty} R_{n,0}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{n,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots =$

iii) $e^{0,1} \cong T_{3,0}(0,1) = 1 + \frac{(0,1)}{1!} + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!}$

$\cong 1,00517$

iv) Θ.ν.δ.ο $e \notin \mathbb{Q}$

Απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή.

Έστω ότι $e \in \mathbb{Q}$ $(2 < e < 3)$

τότε $\exists\ m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $e = \frac{m_0}{n_0}$

Θεωρούμε $k \geq 2$, $k \geq n_0$ ($k$ = σταθερό)

$$\begin{cases} e = T_{k,0}(1) + R_{k,0}(1) = \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}, \ \xi \in (0,1) \\ e = \frac{m_0}{n_0} \end{cases}$$

$$\frac{m_0}{n_0} = \left(1 + \dots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}$$

(πολλ/με με $k!$)

$$0 < \frac{e^{\xi}}{k+1} = \underbrace{\frac{m_0}{n_0} k!}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{k!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$

$$0 < a = \underbrace{\frac{e^{\xi}}{k+1}}_{\in \mathbb{N}} < \frac{e}{k+1} < \frac{3}{k+1} \leq \frac{3}{2+1} = 1$$

$\{0 < \underbrace{a}_{\in \mathbb{N}} < 1\}$ Άτοπο ($\nexists$ φυσικός αρ. μεταξύ 0, 1 !!)

(... συνέχεια λύσης άσκησης 1 (iv))

Ζητάμε προσέγγιση του $e$ με σφάλμα $< 10^{-5}$

Ζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$ : $R_{n_0}(1) = \dfrac{e^{\xi}}{(n_0+1)!} < 10^{-5}$

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \underset{0<\xi<1}{<} \frac{3}{(n+1)!} \quad (*)$$

/ Βρίσκουμε $n_0$:

$\dfrac{3}{(n_0+1)!} < \dfrac{1}{10^5}$. Τότε $R_{n_0,0}(1) = \dfrac{e^{\xi}}{(n_0+1)!} \overset{(*)}{<}$

Βρίσκουμε $n_0$ : $3 \cdot 10^5 < (n_0+1)! \Rightarrow n_0 = 8$ $(300000 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \cong 2{,}71828$$

με σφάλμα $< 10^{-5}$

---

Σχήματα: Πολ. Taylor, Υπολοίπου Taylor (έως 15ου βαθμού/ασυμπ