Ανάλυση ΙΙ - Μάθημα 05 - 04/03/2011

Τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Ορισμοί

i) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Το $S(\vec{x}_0, r) =: \{x \in \mathbb{R} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$ καλείται ανοιχτή σφαίρα κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r (μπάλα του $\mathbb{R}^n$)

ii) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$

Το $\hat{S}(x_0, r) =: \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \vec{r}\}$ καλείται κλειστή σφαίρα κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r.

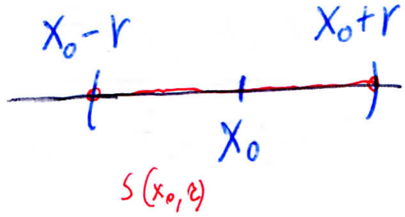
Παραδείγματα

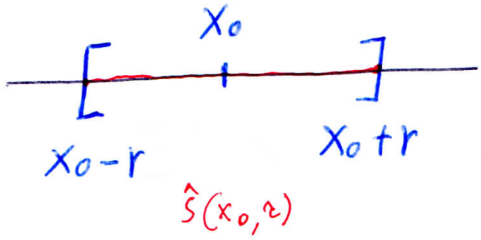
1. $n = 1$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

$$= (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\hat{S}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\}$$

$$= [x_0 - r, x_0 + r]$$

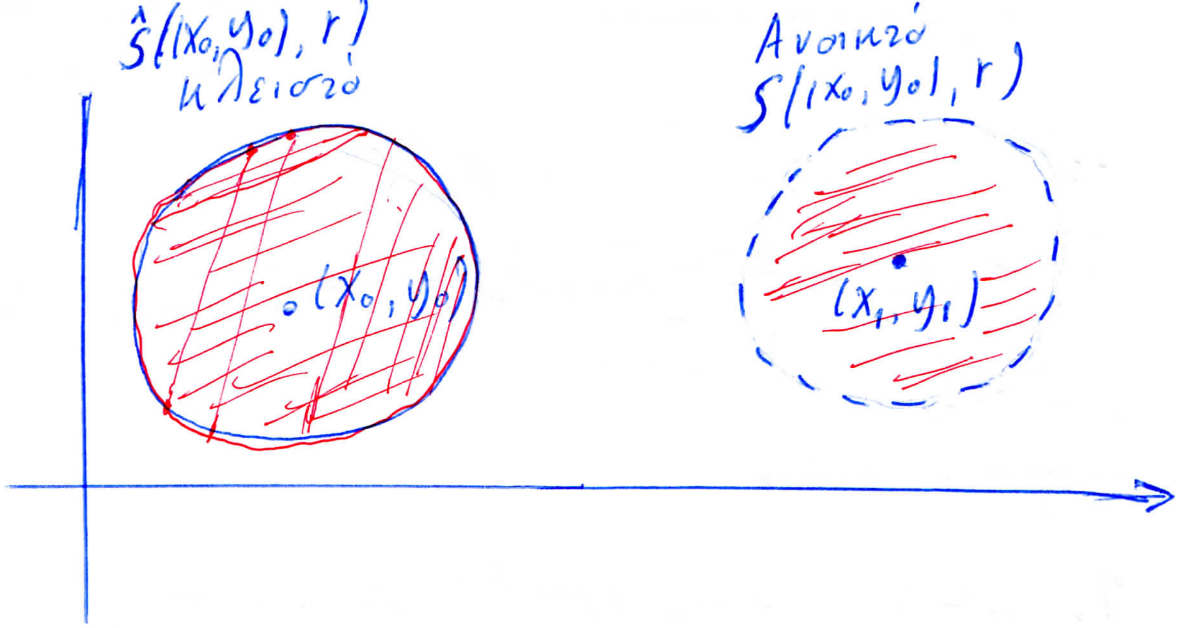




2. $n=2$

$$S((x_0,y_0),r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\}$$

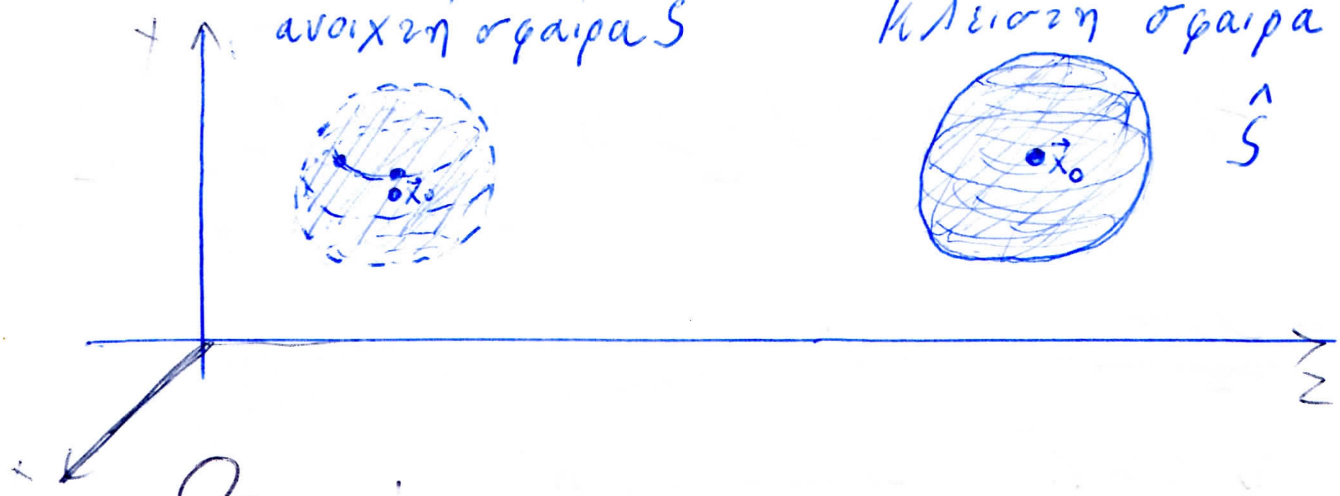
$$\hat{S}(\ldots)=\{\ \ldots\ \leq r\}$$



3. $n=3$

$$S((x_0,y_0,z_0),r)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<r\}$$

$$\hat{S}(\ldots)=\{\ \ldots\ \leq r\}$$



Ορισμοί

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

i) $\vec{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του A

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad S(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \vec{a} \in A : \|\vec{x}_0 - a\| < \varepsilon$

ii) Εάν $\vec{x}_0 \in A$ και δεν είναι σ.σ. του A,

$\vec{x}_0$ Μεμονωμένο σημείο δηλ. $\exists \varepsilon_0 > 0$:

$$A \cap S(x_0, \varepsilon_0) = \{\vec{x}_0\}$$

Το σύνολο των σ.σ. του A συμβολίζεται με A'

Παραδείγματα

1) $A = (0,1)$ ή $[0,1)$ ή $(0,1]$ ή $[0,+\infty)$...

$A' = [0,1]$ / $[0,+\infty)' = [0,+\infty)$

2) $B = (0,1) \cup \{2,3,\dots\}$, $B' = [0,1]$

για 2,3,… είναι μεμ. σημεία του B

Ορισμοί

1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$

$\iff \forall \vec{a} \in A \ \exists \ S(\vec{x}, r) \subseteq A$

2) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό

$\iff \mathbb{R}^n \setminus B$ είναι ανοικτό

$\iff B' \subseteq B$

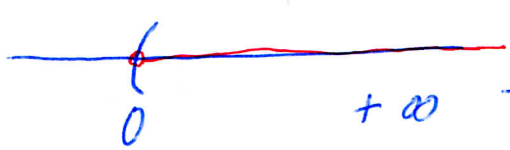
3) K φραγμένο $\iff \exists \ M \in \mathbb{R}$:
$\|\vec{x}\| \leq M \ \ \forall \vec{x} \in K \iff K \subseteq \hat{S}(0, M)$

4) K συμπαγές $\iff K =$ φραγμένο + κλειστό.

Παραδείγματα

1) $\mathbb{R}$

$I = (0,1)$



$I = (0, +\infty)$

Ανοικτά

(04/03)

$[0,1]$ κλειστό

$[0,+\infty)$ κλειστό

2) $\mathbb{N}$ κλειστό

$\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> είναι ανοικτό

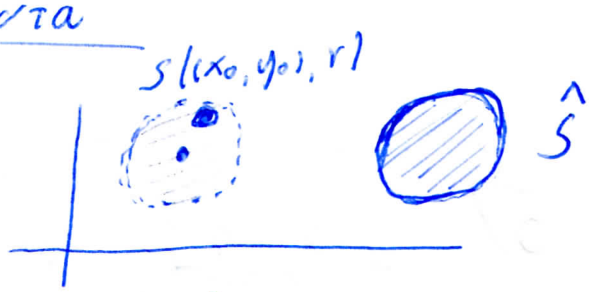
<u>δεν</u> είναι κλειστό

ομοίως

$[0,1)$ <u>δεν</u> είναι ανοικτό ούτε κλειστό

<u>$\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ Αν. + κλειστά</u>

3) $n=2$ / $\mathbb{R}^2$

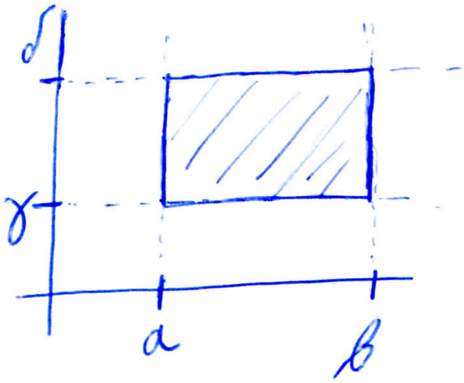


$S((x_0,y_0),r)$ ανοικτό σύνολο

$\hat{S}((x_0,y_0),r)$ κλειστό σύνολο

$$B=[a,b]\times[\gamma,\delta]$$
$$=\{(x,y): a\le x\le b,\ \gamma\le y\le \delta\}$$

<u>κλειστό</u> σύνολο



4) $n = 3$ / $\mathbb{R}^3$

$S(\vec{x}_0, r)$ αν. σύνολο στον $\mathbb{R}^3$ $(\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3)$

$\hat{S}(\vec{x}_0, r)$ κλ. σύνολο (στον $\mathbb{R}^3$) $(\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3)$

$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

(κλειστό) Ορθογώνιο

5) $[0, 1]$, $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $(0, 1]$

$[0,1]$ → Συμπαγές

$\mathbb{N}$ → (κλειστό, όχι φραγμ.) όχι Συμπαγές

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ → Συμπαγές

$(0,1]$ → Όχι συμπαγές (φραγμένο, ~~όχι~~ κλειστό)

(04/03)

Σύνορο συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\partial A \equiv \operatorname{bd} A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0,\ S(\vec{x},\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ και } S(\vec{x},\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \}$$

Παραδείγματα

1) $A = [0,1], \ldots, (0,1),\quad (0,+\infty),\ \mathbb{Q}$

$\partial A = \{0,1\}$

$\partial((0,+\infty)) = \{0\}$

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

→ Ισχύει A κλειστό $\Longleftrightarrow \partial A \subseteq A$

2) $\partial S(\vec{x}_0, r) = \partial \hat{S}(\vec{x}_0, r) =$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| = r \}$ (= επιφάνεια της σφαίρας)

Καμπύλες, Επιφάνειες, Ευθείες, Επίπεδα (Γενικά)

(μη αυστηρός ορισμός)

Καμπύλη είναι ένας δρόμος/τροχιά που περνάμε από κάθε σημείο του με συνεχή τρόπο.

· Ακριβής ορισμός: Urysohn 1921, Menger 1932

Ορισμός (Παραμετρικοποιημένη Καμπύλη, Καμπύλη)

$\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, I = διάστημα του $\mathbb{R}$

$\Gamma : \vec{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$. με $x_1, \ldots x_n$ = συνεχείς

$\Gamma = \vec{r}(I)$ ίχνος της καμπύλης ή καμπύλη.

Πως περιγράφεται μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Αναλυτική εξίσωση

$\Gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$, $f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

Καρτεσιανή εξίσωση

$\Gamma = \{(x,y) : y = f(x), x \in I\}$

(όταν λύνεται η $f(x,y) = 0$ ως προς x ή y)

Παραμετρικές εξισώσεις

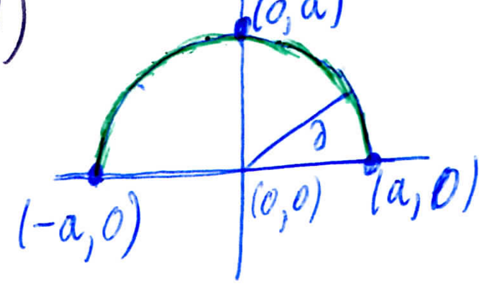
$$\Gamma = \{ \vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I \}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Παραδείγματα

Να περιγραφεί ο πράσινος δρόμος

1)



Αναλ. εξίσωση

$$\Gamma = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = a^2,\ y \geq 0 \}$$

Καρτ. εξίσωση

$$\Gamma = \{ (x,y) : y = \sqrt{a^2 - x^2},\ x \in [-a, a] \}$$

Παρ. εξισώσεις

$$\Gamma = \{ \vec{r}(\theta) = (a\,\text{συν}\theta,\ a\,\text{ημ}\theta)\quad \theta \in [0, \pi] \}$$

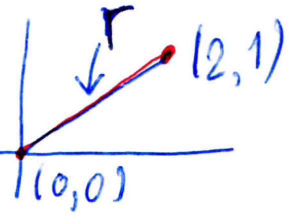
$$\left.\begin{aligned} x(\theta) &= a\,\text{συν}\theta \\ y(\theta) &= a\,\text{ημ}\theta \end{aligned}\ \right|\ \theta \in [0, \pi] \}$$

Οι παρ. δεν είναι μοναδικές

π.χ. $r_1(x) = (x, \sqrt{a^2 - x^2}),\ x \in [-a, +a]$

$r_2(t) = (a\,\text{συν}(100\theta),\ a\,\text{ημ}(100\theta))\quad \theta \in [0, \frac{\pi}{100}]$

Μόνοι μας: 2



Να περιγραφεί ο κόκκινος δρόμος

Επ. Μάθημα 06