<u>Θεωρήματα</u> : Θεμελιώδη του Απ. Λογισμού
Green (στον $\mathbb{R}^2$)
Stokes (στον $\mathbb{R}^3$)
Gauss-Green (στον $\mathbb{R}^3$)

Στις ακόλουθες πρόχειρες σημειώσεις θα προσεγγιστούν οι αποδείξεις των θεωρημάτων αυτών.
Αν και εκ πρώτης όψεως φαίνονται ασύνδετα, κατά βάθος οι αποδείξεις στηρίζονται σε βασικές γνώσεις.

Οι σημειώσεις γράφτηκαν για τους φοιτητές του τμ. Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, που προσπαθούν να εμβαθύνουν στις έννοιες του μαθήματος "Ανάλυση ΙΙ" (ΕΚΠΑ).

1 Ιουνίου 2012

Λένα Ευαγγελάτου-Δάλλα.

(I) Θεώρημα (πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού) ΘΘΑΛ-1
Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in[\alpha,\beta]$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Τότε

$$F'(x)=f(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)\Big|_{x=x_0}=f(x_0) \quad , x_0\in[\alpha,\beta]$$

ΑΠΟΔ Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$ (για $x_0=\alpha$ ή β ανάλογα).
Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα $\exists\, \delta>0$:
αν $t\in[\alpha,\beta]$ με $|t-x_0|<\delta$ τότε $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. (*)
Το $f(x_0)=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt$ (**) για $x\in[\alpha,\beta]$, $x\neq x_0$.
Άρα για $x\in[\alpha,\beta]$: $0<|x-x_0|<\delta$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| \overset{(**)}{=} \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x_0} f(t)\,dt\right]-\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right|$$

$$=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right|=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\,dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \overset{*}{\leq} \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dt\right|=\frac{\varepsilon}{|x-x_0|}|x-x_0|=\varepsilon.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε υπάρχει η $F'(x_0)$ και

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

Σχ. Η απόδειξη του ΘΘΑΛ-1 βασίζεται
- Ορισμός ολοκλ. Riemann
- Ορισμός συνέχειας συνάρτησης
- Ορισμός παραγώγου συνάρτησης
- Ιδιότητες ολοκληρώματος.

(II) <u>Θεώρημα</u> (δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού) <u>ΘΘΑΛ-2</u>

Έστω $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο g' (g-C^1)

Τότε $\int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = g(\beta)-g(\alpha)$

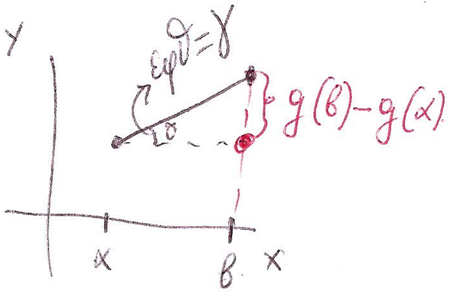
<u>Απόδ.</u> Έστω $G(x)=\int_\alpha^x g'(t)\,dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της g'

Τότε (ΘΘΑΛ-1) $G'(x)=g'(x)$ $x\in[\alpha,\beta]$ ή $(G-g)'(x)=0$ $x\in[\alpha,\beta]$

Από το θεώρημα Μέσης Τιμής $(G-g)(x)=c$ $x\in[\alpha,\beta]$ (*)

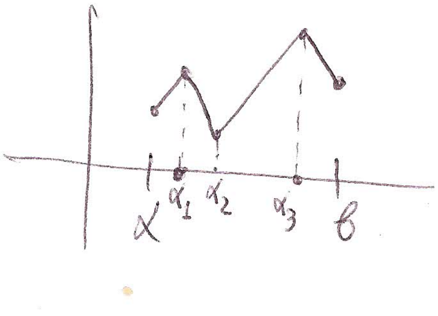
Άρα $\int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = G(\beta) = G(\beta)-\underbrace{G(\alpha)}_{(=0)} \overset{*}{=} (g(\beta)+c)-(g(\alpha)+c) =$
$= g(\beta)-g(\alpha)$.

<u>Σημ.</u> Το θεώρημα ισχύει γενικότερα για g' ολοκληρώσιμη, όπου στην απόδειξη χρησιμοποιούμε
- ορισμό ολ. Riemann
- θεώρημα Μέσης Τιμής.



$g(x)=\gamma x+\delta$
$g'(t)=\gamma$

$\int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = \gamma(\beta-\alpha)$ με $\gamma=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$.



g Πολυγωνική

$$\left.\begin{aligned}
\int_\alpha^{\alpha_1} g'(t)\,dt &= \cancel{g(\alpha_1)} - g(\alpha)\\
\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g'(t)\,dt &= \cancel{g(\alpha_2)} - \cancel{g(\alpha_1)}\\
&\ \vdots\\
\int_{\alpha_3}^{\beta} g'(t)\,dt &= g(\beta) - \cancel{g(\alpha_3)}
\end{aligned}\right\}\ \int_\alpha^\beta g' = g(\beta)-g(\alpha)$$

(III) Θεώρημα Green (στο επίπεδο x-y)

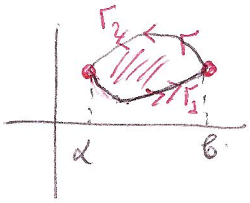
Έστω $\vec{F}=(P,Q): D(\subseteq \mathbb{R}^2)\to \mathbb{R}^2$ δ.π. C^1, όπου το σύνολο D είναι κλειστό+φραγμένο σύνολο, του οποίου το σύνορο ∂D αποτελείται από απλές+κλειστές+(κ.τ.)λείες καμπύλες. Τότε

(α) $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$ (εφαπτομενική μορφή)

(β) $$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{\partial D}(\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds$$ (κάθετη μορφή)

Απόδ.(α) Θα το αποδείξουμε για σύνολο απλό (x-απλό + y-απλό).

$$D=\{(x,y):\ \alpha\le x\le \beta\ ,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}=$$
$$=\{(x,y):\ \gamma\le y\le \delta\ ,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}\quad (x_1,x_2,y_1,y_2: C^1)$$



• (*) $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy \overset{(Fubini)}{=} \int_\alpha^\beta\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right]dx \overset{ΘΘΑΛ\text{-}2}{=} \int_\alpha^\beta\left[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))\right]dx$$

• Υπολογίζουμε το $\oint_{\partial D}(P,0)\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma_1}(P,0)\cdot d\vec{r}-\int_{\Gamma_2}(P,0)\cdot d\vec{r}$, όπου

Γ_1 : $\vec{r}_1(x)=(x,y_1(x))\quad x\in[\alpha,\beta]\quad ,\vec{r}_1{}'(x)=(1,y_1'(x))$

Γ_2 : $\vec{r}_2(x)=(x,y_2(x))\quad x\in[\alpha,\beta]\quad ,\vec{r}_2{}'(x)=(1,y_2'(x))$

Θα έχουμε $$\int_{\Gamma_1}(P,0)\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta(P(\vec{r}_1(x)),0)\cdot\vec{r}_1{}'(x)\,dx=$$
$$=\int_\alpha^\beta P(\vec{r}_1(x))dx=\int_\alpha^\beta P(x,y_1(x))\,dx.\quad (1)$$

και $$\int_{\Gamma_2}(P,0)\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta P(x,y_2(x))\,dx.\quad (2)$$

Άρα $$\oint_{\partial D}(P,0)\cdot d\vec{r}\overset{(1)+(2)}{=}\int_\alpha^\beta\left[P(x,y_1(x))-P(x,y_2(x))\right]dx\overset{(*)}{=}-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy.\quad (3)$$

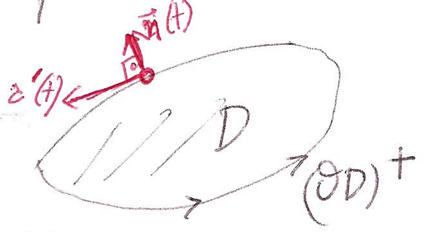
Ανάλογα (D ως y-απλό) $$\oint_{\partial D}(0,Q)\cdot d\vec{r}=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy\quad (4)$$

Προσθέτοντας (3)+(4) $$\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

(β) Εφαρμόζουμε το (α) για $\vec{G}=(P_1,Q_1)$ όπου $P_1=-Q$, $Q_1=P$
(δηλ. για το $\vec{G}=(-Q,P)\perp\vec{F}=(P,Q)$)

και για σύνορο $(\partial D)^+$: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\varepsilon,\zeta]$ C^1 και με $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$. Τότε το $\vec{n}(t)=(y'(t),-x'(t))/\|\vec{r}\,'(t)\|$ είναι το κάθετο στο $\vec{r}\,'(t)$

Τότε $\iint_D\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D}\vec{G}\cdot d\vec{r}$. Αναλυτικά :



$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D}(-Q,P)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_\varepsilon^\zeta\left(-Q((x(t),y(t))),\ P((x(t),y(t)))\right)\cdot(x'(t),y'(t))\,dt=$$

$$=\int_\varepsilon^\zeta\left[P(x(t),y(t))\,y'(t)-Q(x(t),y(t))\,x'(t)\right]dt=$$

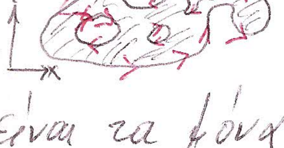
$$=\int_\varepsilon^\zeta\left(P(\vec{r}(t)),Q(\vec{r}(t))\right)\cdot(y'(t),-x'(t))\,dt=\oint_{\partial D}(\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds$$

όπου $ds=\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$.

<u>Σημ.</u> • Το θ. Green (α) είναι το θ. Stokes για επιφάνεια του x-y, $\vec{F}=(P,Q)$ και το θ. Green (β) είναι για σύνολο $D\subseteq\mathbb{R}^2$, $\vec{F}=(P,Q)$ το θ. Gauss

• Η απόδειξη για x+y-απλό σύνολο βασίστηκε στο <u>θ. Fubini</u> και <u>στο</u> <u>Θ.Θ.Α.Λ-2</u>.

Το θ. Green αποδεικνύεται για πολύ γενικότερα σύνολα από τα απλά, με την χρήση γεωμετρικών ισχυρισμών.



Συμπερασματικά, το <u>θ. Fubini</u> και το <u>Θ.Θ.Α.Λ-2</u> είναι τα <u>μόνα</u> <u>αναλυτικά θεωρήματα</u> που χρειαζόμαστε για την <u>απόδειξη του θ. Green</u>.

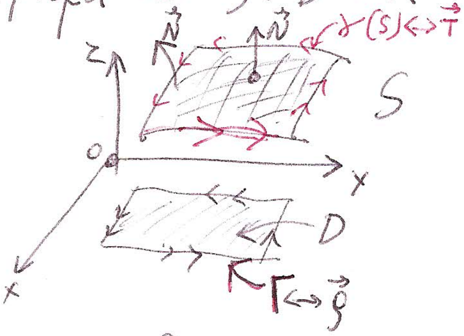
(IV) Θεώρημα Stokes στον $\mathbb{R}^3$

Έστω $\vec{F}=(P,Q,R): A(\subseteq \mathbb{R}^3)\to \mathbb{R}^3$ δ.π C^1, A ανοικτό σύνολο και $S\subseteq A$ (κ.τ.) λεία, C^2 επιφάνεια, προσανατολισμένη, της οποίας το σύνορο $\gamma(S)$ αποτελείται από απλές + κλειστές + (κτ) λείες καμπύλες. Τότε

$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

(το $\gamma(S)$ θετικά προσανατολισμένο ως προς την προσανατολισμένη S)

Απόδ. Θα το αποδείξουμε για $S=\{(x,y,z): z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$, δηλαδή η επιφάνεια S να είναι το γράφημα της $f: D\to\mathbb{R}$ με D "καλό σύνολο"



• Αρχίζουμε με το $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$

Ο στροβιλισμός του $\vec{F}$ είναι

$\nabla\times\vec{F}=(R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y)$ όπου $R_y=\frac{\partial R}{\partial y}$, $Q_z=\frac{\partial Q}{\partial z}$ κτλ. στα $(x,y,f(x,y))\in S$

κάθετο στο γράφημα είναι το $(-f_x,-f_y,1)$, άρα

$$\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=\iint_D (R_y-Q_z, P_z-R_x, Q_x-P_y)\cdot(-f_x,-f_y,1)\,dx\,dy =$$

$$=\iint_D \left[-f_x(R_y-Q_z)-f_y(P_z-R_x)+(Q_x-P_y)\right]dx\,dy. \quad (1)$$

• Προχωρούμε με το $\oint_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Αν $\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$, $(x,y)\in D$ είναι η παραμέτρηση της S και $\vec{\rho}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$ είναι η παραμέτρηση του συνόρου Γ το D, Τότε η παραμέτρηση του συνόρου $\gamma(S)$ της επιφάνειας S είναι

$$\vec{\tau}(t)=\vec{r}\circ\vec{\rho}(t)=(x(t),y(t),f(x(t),y(t))),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

Το $\vec{r}\,'(t) \overset{(*)}{=} (x'(t), y'(t), x'(t)f_x + y'(t)f_y)$ (κανόνας $\overset{(*)}{\text{Αλυσιδωτής}}$ Παραγώγισης)

Άρα, $I = \oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta}\left[Px' + Qy' + Rf_x x' + Rf_y y'\right]dt =$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\left[(P+Rf_x)x' + [Q+Rf_y]y'\right]dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}(P+Rf_x, Q+Rf_y)\cdot(x', y')\,dt = \oint_{\Gamma}(P+Rf_x, Q+Rf_y)\cdot\vec{\rho}\,'\,dt$$

δηλ. το ζητούμενο είναι το επικ. ολοκλήρωμα του δ.π.

$\vec{G} = (P+Rf_x, Q+Rf_y)$ πάνω στην καμπύλη Γ του x-y επιπέδου.

Η Γ είναι το σύνορο του συνόλου D του x-y, οπότε εφαρμόζεται το Θ. Green για το $\vec{G}$ και το D, $I = \oint_{\Gamma}(P_1, Q_1)\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right)dx\,dy$ όπου $P_1 = P + Rf_x$, $Q_1 = Q + Rf_y$. με $P = P(x,y,f(x,y))$, $Q = Q(x,y,f(x,y)) = Q(\vec{r}(x,y))$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} \overset{(*)}{=} \Big[Q_x \overset{=1}{\frac{\partial x}{\partial x}} + \cancel{Q_y \overset{=0}{\frac{\partial y}{\partial x}}} + Q_z f_x\Big] + \Big[R_x\frac{\partial x}{\partial x} + \cancel{R_y \overset{=0}{\frac{\partial y}{\partial x}}} + R_z\frac{\partial f}{\partial x}\Big]f_y + Rf_{yx} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} \overset{(*)}{=} \Big[\cancel{P_x \overset{=0}{\frac{\partial x}{\partial y}}} + P_y \overset{=1}{\frac{\partial y}{\partial y}} + P_z f_y\Big] + \Big[\cancel{R_x \overset{=0}{\frac{\partial x}{\partial y}}} + R_y\frac{\partial y}{\partial y} + R_z\frac{\partial f}{\partial y}\Big]f_x + Rf_{xy}.$$

Επειδή η S είναι C^2, $f_{xy} = f_{yx}$ οπότε

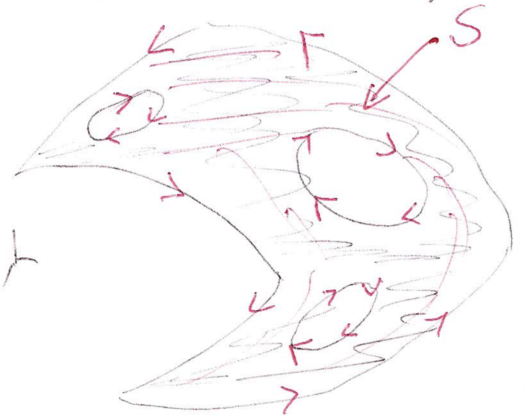
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = (Q_x + Q_z f_x + R_x f_y) - (P_y + P_z f_y + R_y f_x) \quad \text{και}$$

$$I = \iint_D\left[-f_x(R_y - Q_z) - f_y(P_z - R_x) + (Q_x - P_y)\right]dx\,dy \qquad (2)$$

Τελικά $(1) = (2)$, $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Σημ : Στην ουσία, "καμπυλώσαμε" το σύνολο D του επιπέδου x-y μέσω της f και το κάναμε επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.
Το κάθετο στο σημείο $(x,y)\in D$ ήταν το $(0,0,1)$ και έγινε $(-f_x, -f_y, 1)$ στο σημείο $(x,y,f(x,y))\in S$.
Τέλος το $\vec{F}(x,y,f(x,y)) = (P(x,y,f(x,y)), Q(x,y,f(x,y)), R(x,y,f(x,y)))$ γίνεται $(P+Rf_x, Q+Rf_y)$ στο x-y επίπεδο.
$\left(\overset{\parallel}{(P,Q)}+R\nabla f.\right)$

- Χρησιμοποιήσαμε
  - Θ. Green στο x-y
  - Κανόνα Αλυσιδωτής Παραγώγισης
  - Θ. Μεικτών Παραγώγων.
  - Κάθετο διάνυσμα σε ομαλή επιφάνεια.
- Το Θ. Stokes αποδεικνύεται για πολύ γενικότερα σύνολα από τα γραφήματα C^2-συναρτήσεων



(V) Θεώρημα Gauss(-Green) της Απόκλισης

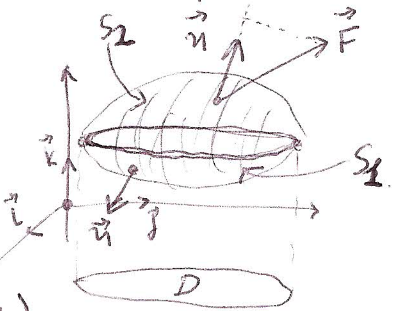
Έστω $\vec{F}=(P,Q,R): B(\subseteq \mathbb{R}^3)\to \mathbb{R}^3$ σ.π C^1, όπου το B είναι κλειστό+φραγμένο σύνολο, του οποίου το σύνορο ∂B αποτελείται από απλές+κλειστές+(κε)λείες επιφάνειες. Τότε

$$\oiint_{\partial B} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_B (\operatorname{div}\vec{F})\,dx\,dy\,dz.$$

<u>Αποδ</u> Θα το αποδείξουμε για B σύνολο απλό ($xy, xz, \dots$ απλό).

$B=\{(x,y,z): z_1(x,y)\leq z\leq z_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$ ως xy-απλό σύνολο.

Θα αποδείξουμε ότι $\iiint_B \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\oiint_{\partial B} R(\vec{k}\cdot\vec{n})\,ds$, όπου $\vec{k}=(0,0,1)$ και το $\vec{n}(x,y,z)$ το μοναδιαίο κάθετο στο $(x,y,z)\in\partial B$ με διεύθυνση στο εξωτερικό του B



• $\displaystyle\iiint_B \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \overset{(\text{Fubini})}{=} \iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy \overset{\text{ΘΘΑΛ-2}}{=}$

$$=\iint_D \left[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\right]dx\,dy \quad (1)$$

• Υπολογίζουμε το $\displaystyle\oiint_{\partial B}(R\vec{k})\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,ds+\iint_{S_2} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,ds \,/\, \partial B=S_1\cup S_2$

S_1: $\vec{r}_1(x,y)=(x,y,z_1(x,y))$, $(x,y)\in D$ με εξ. κάθετο $\left(+\frac{\partial z_1}{\partial x}, +\frac{\partial z_1}{\partial y}, -1\right)$

S_2: $\vec{r}_2(x,y)=(x,y,z_2(x,y))$, $(x,y)\in D$ με εξ. κάθετο $\left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}, -\frac{\partial z_2}{\partial y}, +1\right)$

Θα έχουμε $\displaystyle\iint_{S_1} R(\vec{k}\cdot\vec{n})\,ds=-\iint_D R(\vec{r}_1(x,y))\,dx\,dy$ και $\displaystyle\iint_{S_2} R(\vec{k}\cdot\vec{n})\,ds=\iint_D R(\vec{r}_2(x,y))\,dx\,dy$

Άρα $\displaystyle\oiint_{\partial B}(R\vec{k})\cdot d\vec{S}=\iint_D \big(R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\big)\,dx\,dy \quad (2)$

Από τις (1),(2) έχουμε $\displaystyle\iiint_B \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\oiint_{\partial B}(R\vec{k})\cdot\vec{n}\,ds \quad (3)$

Ανάλογα (D είναι yz-απλό, xz-απλό) έχουμε

$$\iiint_B \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint_{\partial B} (P\vec{i})\cdot\vec{n}\,dS \quad (4) \quad \text{και} \quad \iiint_B \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint_{\partial B} (Q\vec{j})\cdot\vec{n}\,dS \quad (5)$$

Αθροίζοντας (3)+(4)+(5)

$$\iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint_{\partial B} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \oint\!\!\oint_{\partial B} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

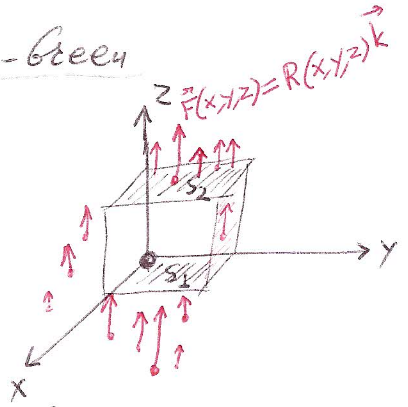
Σημ
- Η απόδειξη βασίστηκε στο Θ. Fubini, στο Θ.Θ.Α. Λ-2 και στο κάθετο
- Κάνοντας την ίδια διαδικασία στο (β) του Green έχουμε άμεση απόδειξη αυτού (χωρίς το Green (α)) επιφάνεια
- Ισχύει για γενικότερα σύνολα

Θ. Gauss-Green στον $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega}$$

όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό + φραγμένο σύνολο με ομαλό σύνορο και ω είναι διαφορική μορφή τάξης $(n-1)$ ($(n-1)$-form). —

· Μια κάποια προσέγγιση του Θ. Gauss-Green



Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον κύβο
$B=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ και το δ.π.
$\vec F_3(x,y,z)=(0,0,R(x,y,z))=R(x,y,z)\vec k$

Θα είχαμε ροή μόνο δια μέσου της βάσης $S_1=\{(x,y,z): z=0,\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}$
και της $S_2=\{(x,y,z): z=1,\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}$

Άρα $\oiint_{\partial B}\vec F_3\cdot d\vec S=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\Big(R(x,y,0)\,\vec k\cdot\underset{\text{εξ. κάθετο}}{(-\vec k)}+R(x,y,1)\,\vec k\cdot\vec k\Big)dx\,dy=$

$$=\int_0^1\int_0^1[R(x,y,1)-R(x,y,0)]\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1\Big[\int_0^1\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz\Big]dx\,dy=$$

$$=\iiint_B\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \quad (3)$$

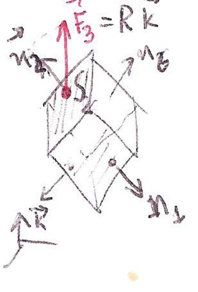
Για $\vec F_2(x,y,z)=(0,Q(x,y,z),0)=Q(x,y,z)\vec j$, $\oiint_{\partial B}\vec F_2\cdot d\vec S=\iiint_B\frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$ (2)

και για $\vec F_1(x,y,z)=(P(x,y,z),0,0)=P(x,y,z)\vec i$, $\iint_{\partial B}\vec F_1\cdot d\vec S=\iiint_B\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$. (1)

Εάν έχουμε $\vec F(x,y,z)=\vec F_1(x,y,z)+\vec F_2(x,y,z)+\vec F_3(x,y,z)$ είναι σαν να βάζουμε τον κύβο στα δ.π. $\vec F_1,\vec F_2,\vec F_3$ συγχρόνως!

Οπότε η ροή $\oiint_{\partial B}\vec F\cdot d\vec S=\oiint_B\vec F_1\cdot d\vec S+\oiint_B\vec F_2\cdot d\vec S+\oiint_B\vec F_3\cdot d\vec S=$

$$\overset{(1)+(2)+(3)}{=}\iiint_B\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dx\,dy\,dz.$$



Εάν τώρα είχαμε την ίδια $\vec F_3$, αλλά ο κύβος είχε στρίψει, τότε η ροή δια μέσου π.χ. της S_2 θα ήταν $\iint_{S_2}(R\vec k)\,d\vec S=$
$=\iint_{S_2}R(\vec k\cdot\vec n_2)\,dS$ κτλ.