Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Ανάλυση II
17 Σεπτεμβρίου 2020, Slot 1

1. (2.5 μον.) Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση και $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $u(x,y,t) := f(x-\lambda t, y-\lambda t)$, $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ μια σταθερά. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\partial u/\partial t, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ και την μερική παράγωγο δεύτερης τάξης $\partial^2 u/\partial t^2$ της u συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f (πρώτης και δεύτερης τάξης).

Λύση: Έστω $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y,t) := (x-\lambda t, y-\lambda t)$. Έστω $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχει κανείς ότι

$$J_{g\circ T}(x,y,t) = J_g(T(x,y,t))J_T(x,y,t),$$

ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(g\circ T)}{\partial x}(x,y,t), \frac{\partial(g\circ T)}{\partial y}(x,y,t), \frac{\partial(g\circ T)}{\partial t}(x,y,t)\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(T(x,y,t)), \frac{\partial g}{\partial y}(T(x,y,t))\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(T(x,y,t)), \frac{\partial g}{\partial y}(T(x,y,t)), -\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(T(x,y,t)) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(T(x,y,t))\right)\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ T)}{\partial x}(x,y,t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(T(x,y,t))\\ \frac{\partial(g\circ T)}{\partial y}(x,y,t) &= \frac{\partial g}{\partial y}(T(x,y,t))\\ \frac{\partial(g\circ T)}{\partial t}(x,y,t) &= -\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(T(x,y,t)) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(T(x,y,t)).\end{aligned} \tag{1}$$

Επειδή τώρα $u = f\circ T$, έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(T(x,y,t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-\lambda t, y-\lambda t)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,t) &= \frac{\partial f}{\partial y}(T(x,y,t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x-\lambda t, y-\lambda t)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) &= -\lambda\frac{\partial f}{\partial x}(T(x,y,t)) - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}(T(x,y,t)) = -\lambda\frac{\partial f}{\partial x}(x-\lambda t, y-\lambda t) - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}(x-\lambda t, y-\lambda t).\end{aligned}$$

Για την μερική παράγωγο δεύτερης τάξης έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\circ T(x,y,t) - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\circ T(x,y,t)\right)\\ &= -\lambda\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}\circ T(x,y,t) - \lambda\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}\circ T(x,y,t)\\ &= -\lambda\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(T(x,y,t)) - \lambda\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(T(x,y,t))\right) - \lambda\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(T(x,y,t)) - \lambda\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(T(x,y,t))\right)\\ &= \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T(x,y,t)) + 2\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(T(x,y,t)) + \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T(x,y,t))\\ &= \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-\lambda t, y-\lambda t)) + 2\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-\lambda t, y-\lambda t) + \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x-\lambda t, y-\lambda t).\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η (1) για $g = \partial f/\partial x$ και για $g = \partial f/\partial y$. Χρησιμοποιήθηκε επίσης το γεγονός ότι η f είναι C^2 και άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

2. (2 μον.) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{\mathrm{d}y}{y^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Λύση: Χρησιμοποιεί κανείς το θεώρημα Fubini και κάνει αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης. Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το

$$0 \leqslant x \leqslant 8 \qquad \& \qquad \sqrt[3]{x} \leqslant y \leqslant 2$$

και το σύστημα αυτό ανισοτήτων είναι ισοδύναμο με το

$$0 \leqslant y \leqslant 2 \qquad \& \qquad 0 \leqslant x \leqslant y^3.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{\mathrm{d}y}{y^4+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \int_0^{y^3} \mathrm{d}x\,\frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,\mathrm{d}y \\
(u = y^4+1) \qquad &= \tfrac{1}{4}\int_1^{17} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \tfrac{1}{4}\ln 17.
\end{aligned}$$

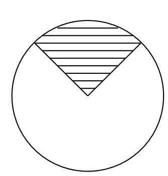
3. (2 μον.) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ όπου

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant |x|\right\}.$$

Λύση: Πολικές συντεταγμένες. Το χωρίο ολοκλήρωσης D είναι το μέρος του μοναδιαίου κύκλου που είναι πάνω από τον άξονα των x και μεταξύ των ευθειών $y = x$ και $y = -x$. Άρα

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} r\sin(r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r\sin(r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}(1-\cos 1).$$

Εναλλακτικά μπορεί κανείς να προσδιορίσει το χωρίο D αναλυτικά. Πρέπει $r^2 \leqslant 1$ και $r\sin\theta \geqslant r|\cos\theta|$. Επειδή $r \geqslant 0$ πάντα, $r^2 \leqslant 1$ και $r \geqslant 0$ ισοδυναμούν με τις $0 \leqslant r \leqslant 1$. Τώρα $r\sin\theta \geqslant r|\cos\theta|$ αν και μόνο αν $\sin\theta \geqslant |\cos\theta|$ αν και μόνο αν $\cos\theta \geqslant 0$ και $\tan\theta \geqslant 1$ ή $\cos\theta < 0$ και $\tan\theta \leqslant -1$· αυτές ισοδυναμούν με τις $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ή $\pi/2 < \theta \leqslant 3\pi/4$. Άρα το χωρίο ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες είναι το $\{(r,\theta) \in [0,2\pi) \colon 0 \leqslant r \leqslant 1 \text{ και } \pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4\}$.



4. (1.5 μον.) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, όπου $\gamma(t) = \left(\frac{1}{4}t^4, \sin(\ln t)\right)$, $t \in [1, \mathrm{e}]$.

Λύση: Έστω $f(x,y) = xy$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$$

Επομένως η διαφορική μορφή $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ είναι ακριβής. Ισοδύναμα, αν $F(x,y) = (y,x)$, τότε $F = \nabla f$, δηλαδή το διανυσματικό πεδίο F είναι συντηρητικό, με δυναμικό f. Σε κάθε περίπτωση,

$$\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}r = \int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(\mathrm{e})) - f(\gamma(1)) = f(\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^4, \sin 1) - f(\tfrac{1}{4}, 0) = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^4 \sin 1.$$

5. (2 μον.) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο που περικλείεται από την καμπύλη $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, όπου a, b θετικοί αριθμοί. Τι σχήμα περικλείει η καμπύλη αυτή;

Λύση: Έστω $P(x,y) = -y$ και $Q(x,y) = x$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και θεωρούμε την διαφορική μορφή $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Η καμπύλη που δίνεται είναι ομαλή αφού είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και το ίδιο και οι συναρτήσεις P και Q. Επιπλέον η καμπύλη γ είναι κλειστή αφού $\gamma(0) = (a, 0) = \gamma(2\pi)$ και απλή, αφού $\gamma(t) = \gamma(s)$ για $t, s \in (0, 2\pi)$ αν και μόνο αν $\cos t = \cos s$ και $\sin t = \sin s$ και $t, s \in (0, 2\pi)$ και αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $t = s$. Μπορεί λοιπόν κανείς να εφαρμόσει το Θεώρημα Green και παίρνει τότε ότι

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_\gamma -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \iint_D (1+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2E(D),$$

όπου D το χωρίο που περικλείει η καμπύλη γ και $E(D)$ το εμβαδόν του. Τώρα υπολογίζει κανείς το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στα αριστερά. Αν θέσουμε $x(t) := a\cos t$ και $y(t) := b\sin t$, ώστε $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, τότε

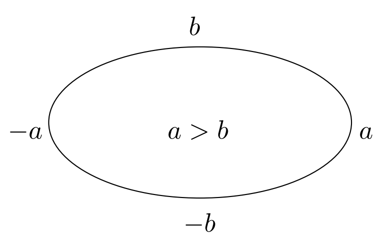
$$\int_\gamma -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} [-b\sin t(-a\sin t) + a\cos t(b\cos t)]\,\mathrm{d}t = 2\pi ab.$$

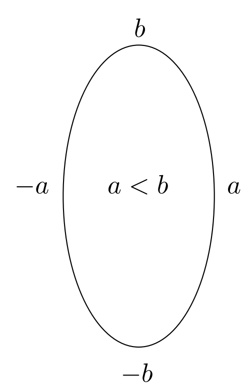
Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(D) = \pi ab$.

Παρατηρεί κανείς ότι

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και άρα κάθε σημείο της καμπύλης ικανοποιεί την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το $(0,0)$ και οριζόντιο ημι-άξονα μήκους a και κατακόρυφο ημι-άξονα μήκους b. Επομένως η δοθείσα καμπύλη περικλείει την παραπάνω έλλειψη.





6. (2 μον.) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2\right\}$.

Λύση: Για να ανήκει ένα σημείο (x,y,z) στο σύνολο B πρέπει καταρχάς $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2$. Θέτοντας $r = \sqrt{x^2+y^2}$ βλέπει κανείς ότι η ανισότητα αυτή ισχύει αν και μόνο αν $0 \leqslant r \leqslant 3 - r^2/4$ και $r \geqslant 0$ που ισχύουν αν και μόνο αν $0 \leqslant r \leqslant 2$, ισοδύναμα αν και μόνο αν $x^2+y^2 \leqslant 4$. Επομένως ο όγκος του B είναι

$$V(B) = \iiint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \left(3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα τώρα υπολογίζεται σε πολικές συντεταγμένες.

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \left(3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\left(3 - \tfrac{1}{4}r^2 - r\right) \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^2 \left(3r - \tfrac{1}{4}r^3 - r^2\right) \mathrm{d}r = \frac{14\pi}{3}.$$

Άρα ο όγκος του B είναι $V(B) = 14\pi/3$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το B ώς το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f,g\colon D \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ και $g(x,y) := 3 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)$, όπου D το παραπάνω χωρίο όπου $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, δηλαδή, όπως βρήκαμε παραπάνω, το $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leqslant 4\}$. Τότε

$$V(B) = \iint_D [g(x,y) - f(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

και από εδώ και πέρα προχωράει κανείς με πολικές συντεταγμένες όπως παραπάνω.