Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Ανάλυση ΙΙ
13 Φεβρουαρίου 2020

1. (2 μον.) Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.
(β) Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$.
(γ) Εξετάστε αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση: (α) Έχει κανείς ότι

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy||y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = \frac{|y|}{2}$$

και αφού $|y|/2 \to 0$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$ έπεται ότι

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ και επομένως η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Επίσης ο αριθμητής και ο παρονομαστής της f είναι πολυώνυμα, άρα συνεχείς συναρτήσεις και άρα και το πηλίκο τους είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε σημείο (x,y) στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή σε κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Έπεται ότι η f είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.

Εναλλακτικά, για την συνέχεια στο σημείο $(x,y) = (0,0)$ θα μπορούσε κανείς αντί για την ανισότητα $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ να χρησιμοποιήσει την ανισότητα $x^2+y^2 \geqslant y^2$. Συγκεκριμένα, αυτή δίνει ότι

$$\frac{1}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{y^2}$$

όταν $y \neq 0$, και επομένως

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|y^2}{y^2} = |x|.$$

Παρατηρείστε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει και όταν $y = 0$ με $x \neq 0$. Επειδή $|x| \to 0$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$, έπεται πάλι ότι $f(x,y) \to 0$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$. Μια παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος είναι και το ακόλουθο.

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} = x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

και αυτό τείνει στο 0 ως γινόμενο της x, που τείνει στο μηδέν, και μιας φραγμένης, της $y^2/(x^2+y^2)$· η τελευταία φράσσεται από το ένα:

$$0 \leqslant \frac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant 1.$$

(β) Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της f είναι πολυώνυμα και άρα διαφορίσιμες συναρτήσεις και επομένως και το πηλίκο τους είναι διαφορίσιμη συνάρτηση σε κάθε σημείο στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή σε κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Εναλλακτικά, υπολογίζει κανείς τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x(xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2y(xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

για $(x, y) \neq (0, 0)$ και αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής τους ως πηλίκα πολυωνύμων και άρα συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ επειδή έχει μερικές παραγώγους και αυτές είναι συνεχείς, σε κάθε τέτοιο σημείο.

Μένει να εξεταστεί η διαφορισιμότητα της f στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Για να είναι η f διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ πρέπει καταρχήν να έχει μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$. Ελέγχουμε απευθείας από τον ορισμό της μερικής παραγώγου. Η μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$ είναι το όριο, αν υπάρχει,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Άρα η f έχει μερική παράγωγο ως προς x στο $(0, 0)$ και αυτή ισούται με μηδέν. Όμοια η f έχει μερική παράγωγο ως προς y στο $(0, 0)$ και αυτή ισούται με

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Για να είναι τώρα η f διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ πρέπει

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - (x - 0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - (y - 0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Έχει κανείς ότι

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - (x - 0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - (y - 0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 - x \cdot 0 - y \cdot 0}{x^2 + y^2} = \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

και άρα για να είναι τώρα η f διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ πρέπει

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Αυτό όμως δεν ισχύει. Πράγματι, για $y = \lambda x$, έχει κανείς ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\lambda x)^2}{\left[x^2 + (\lambda x)^2\right]^{3/2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda^2 x^3}{\left(x^2 + \lambda^2 x^2\right)^{3/2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda^2 x^3}{(1 + \lambda^2)^{3/2}|x|^3}$$

και αυτό έχει όριο $\lambda^2/(1+\lambda^2)$ όταν $x \to 0$ από δεξιά και όριο $-\lambda^2/(1+\lambda^2)$ όταν $x \to 0$ από αριστερά, δηλαδή δεν υπάρχει καν το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

όταν $(x, y) \to (0, 0)$ πάνω στην ευθεία $y = \lambda x$, όταν $\lambda \neq 0$. Επομένως και το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

δεν μπορεί να υπάρχει και η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

(γ) Αν η f είχε συνεχείς μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$ θα ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Από το (β) η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ και άρα δεν μπορεί να έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$.

Εναλλακτικά μπορεί κανείς να εξετάσει αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \qquad \text{και} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Στο (β) υπολογίστηκε ότι $(\partial f/\partial x)(0, 0) = (\partial f/\partial y)(0, 0) = 0$. Από τους υπολογισμούς στο (β) πάλι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

και τα όρια αυτά δεν υπάρχουν αφού για $y = \lambda x$ πάλι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^4(\lambda^2 - 1)}{x^4(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 + 1)^2}$$

και

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\lambda x^4}{x^4(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{2\lambda}{(\lambda^2 + 1)^2}$$

και τα όρια αυτά είναι διαφορετικά για διαφορετικές τιμές του λ. Άρα οι μερικές παράγωγοι της f δεν είναι συνεχείς στο $(0, 0)$.

2. (2 μον.) Έστω $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Θέτουμε $f(x, y) := \varphi(x + y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Δείξτε ότι

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + y, x - y)\right]^2 - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x + y, x - y)\right]^2.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x + y, x - y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x + y, x - y).$$

Λύση: (α) Έστω $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση $T(x, y) = (x+y, x-y)$. Τότε $f = \varphi \circ T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Γράφουμε $T(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$, όπου $u(x, y) = x + y$ και $v(x, y) = x - y$. Έστω

$$J_\varphi(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right) = \nabla\varphi(x, y),$$

$$J_T(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

και

$$J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \nabla f(x,y)$$

οι Ιακωβιανοί πίνακες των φ , T και f, αντίστοιχα. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{aligned} J_f(x,y) &= J_\varphi\ (T(x,y))J_T(x,y) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T(x,y)), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(T(x,y))\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T(x,y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(T(x,y)), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T(x,y)) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(T(x,y))\right) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y)\right). \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y)\right)$$

και άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y),$$

από όπου έπεται άμεσα η προς απόδειξη ταυτότητα.

(β) Η μερική παράγωγος $\partial^2 f/\partial x\partial y$ είναι η μερική παράγωγος της $\partial f/\partial y$ ως προς x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Όμως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y).$$

Θέτουμε

$$G(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y,x-y) \qquad \text{και} \qquad H(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y,x-y).$$

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = G(x,y) - H(x,y)$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial H}{\partial x}(x,y),$$

Γράφουμε

$$g := \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad h := \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Τότε

$$G(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y, x-y) = g \circ T(x,y) \qquad \text{και} \qquad H(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+y, x-y) = h \circ T(x,y)$$

και όπως στο (α) έχουμε ότι

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(T(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial y}(T(x,y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(T(x,y)) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(T(x,y)) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(T(x,y)) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(T(x,y))$$

και

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(T(x,y)) + \frac{\partial h}{\partial y}(T(x,y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(T(x,y)) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(T(x,y)) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(T(x,y)) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(T(x,y)).$$

Επομένως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(T(x,y)) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(T(x,y)) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x+y, x-y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x+y, x-y).$$

3. (1 μον.) Να βρεθούν όλα τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$. Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση: Αφού η f είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο, πρέπει

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Βρίσκουμε λοιπόν τα κρίσιμα σημεία της f, δηλαδή τις λύσεις της εξίσωσης $\nabla f(x,y) = (0,0)$ στο $\mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Αφού

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6y + 6 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 6x + 3,$$

έχουμε ότι

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6y + 6 = 0 \quad \text{και} \quad 2y - 6x + 3 = 0.$$

Λύνοντας την δεύτερη εξίσωση ως προς y και αντικαθιστώντας στην άλλη εξίσωση παίρνουμε ότι $y = 3x - \frac{3}{2}$ και $3x^2 - 18x + 15 = 0$. Αυτό το σύστημα έχει της λύσεις $x = 1$ και $y = \frac{3}{2}$ και $x = 5$ και $y = \frac{27}{2}$. Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f, και άρα μόνα πιθανά ακρότατα της f, είναι τα σημεία $(x,y) = (1, \frac{3}{2})$ και $(x,y) = (5, \frac{27}{2})$.

Ο Εσσιανός πίνακας της f είναι

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ειδικότερα,

$$Hf(1, \tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός έχει γνήσια αρνητική ορίζουσα, και επειδή η ορίζουσα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών, ο πίνακας $Hf(1, \frac{3}{2})$ έχει μία γνήσια θετική ιδιοτιμή και μία γνήσια αρνητική. Αυτό εξ' ορισμού σημαίνει ότι η f έχει σαγματικό σημείο στο σημείο $(x, y) = (1, \frac{3}{2})$. Για το άλλο κρίσιμο σημείο έχουμε ότι

$$Hf(5, \tfrac{27}{2}) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

και αυτός ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος γιατί έχει ορίζουσα $24 > 0$ και ελάσσονα ορίζουσα $30 > 0$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(x, y) = (5, \frac{27}{2})$ και αυτό είναι το μόνο τοπικό ακρότατο της f.

4. (1 μον.) Ένα ορθογώνιο κουτί χωρίς καπάκι πρέπει να έχει επιφάνεια $16\mathrm{m}^2$. Να βρεθούν οι διαστάσεις που πρέπει να έχει ώστε να μεγιστοποιείται ο όγκος του.

Λύση: Έστω x, y, z οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε ο όγκος του είναι $V(x, y, z) = xyz$. Το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι $A(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy$. Επομένως θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση V υπό τον περιορισμό $A(x, y, z) - 16 = 0$.

1ος τρόπος: Πολλαπλασιαστές Lagrange. Από το θεώρημα πολλαπλασιαστών Lagrange, για κάθε σημείο τοπικού ακρότατου για την f υπό τον περιορισμό $A(x, y, z) - 16 = 0$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\nabla V(x, y, z) = \lambda \nabla A(x, y, z).$$

Έχουμε ότι

$$\nabla V(x, y, z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z)\right) = (yz, xz, xy)$$

και

$$\nabla A(x, y, z) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial A}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial A}{\partial z}(x, y, z)\right) = (2z + y, 2z + x, 2(x + y)).$$

Λύνουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{matrix} \nabla V(x, y, z) = \lambda \nabla A(x, y, z) \\ A(x, y, z) = 16 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = \lambda \dfrac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) = \lambda \dfrac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \dfrac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \\[2ex] A(x, y, z) = 16 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} yz = \lambda(2z + y) \\ xz = \lambda(2z + x) \\ xy = 2\lambda(x + y) \\ 2yz + 2xz + xy = 16. \end{matrix}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε ότι $y(z - \lambda) = 2\lambda z = x(z - \lambda)$, οπότε ή $z = \lambda$ ή $x = y$. Αν $x = y$, από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε ότι $x^2 = 4\lambda x$ οπότε ή $x = 0$ ή $x = 4\lambda$. Η λύση $x = 0$ είναι αδύνατη γιατί τότε και $y = 0$ (αφού $x = y$) και αυτό δεν μπορεί να ισχύει λόγω της τέταρτης εξίσωσης. Άρα πρέπει $x = y = 4\lambda$. Η πρώτη (και η δεύτερη) εξίσωση τότε δίνει $4\lambda z = \lambda(2z + 4\lambda) \Leftrightarrow 2\lambda z = 4\lambda^2$, οπότε ή $\lambda = 0$ ή $z = 2\lambda$. Η λύση $\lambda = 0$ αποκλείεται γιατί τότε δύο τουλάχιστον από τα x, y, z θα έπρεπε να είναι μηδέν, λόγω των τριών πρώτων εξισώσεων, και αυτό αντίκειται πάλι στην τέταρτη εξίσωση. Άρα πρέπει $z = 2\lambda$. Τότε όμως παίρνουμε από την τέταρτη εξίσωση ότι $16\lambda^2 + 16\lambda^2 + 16\lambda^2 = 16$, που δίνει τις λύσεις $\lambda = \pm 1/\sqrt{3}$. Επειδή πρέπει $x, y, z > 0$, η λύση $\lambda = -1/\sqrt{3}$ αποκλείεται και παίρνουμε την λύση $x = y = 4/\sqrt{3}$, $z = 2/\sqrt{3}$.

Αν πάλι $z = \lambda$, παίρνουμε από οποιαδήποτε από τις δύο πρώτες εξισώσεις ότι $2\lambda^2 = 0$ και άρα $\lambda = 0$. Τότε $z = 0$ και από την τρίτη εξίσωση πρέπει επίσης ένα από τα x και y να είναι μηδέν. Αυτό όμως ($z = 0$ και $x = 0$ ή $z = 0$ και $y = 0$) δεν γίνεται λόγω της τέταρτης εξίσωσης.

2ος τρόπος. Για να ικανοποιείται ο περιορισμός $A(x, y, z) = 0$ πρέπει

$$z = \frac{16 - xy}{2(x + y)}.$$

Ο όγκος τότε γίνεται

$$f(x, y) = \frac{16 - xy}{2(x + y)} xy$$

και έχουμε να μεγιστοποιήσουμε αυτήν την συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy < 16\right\}.$$

Το μέγιστο θα εμφανίζεται σε ένα σημείο όπου $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, από το θεώρημα Fermat πάλι, όπως στην προηγούμενη άσκηση. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(16y - 2xy^2)(x + y) - (16xy - x^2y^2)}{2(x + y)^2} = \frac{16y^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{2(x + y)^2} = \frac{2y^2(8 - xy) - x^2y^2}{2(x + y)^2}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(16x - 2x^2y)(x + y) - (16xy - x^2y^2)}{2(x + y)^2} = \frac{16x^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{2(x + y)^2} = \frac{2x^2(8 - xy) - x^2y^2}{2(x + y)^2},$$

και

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2y^2(8 - xy) - x^2y^2 = 0 = 2x^2(8 - xy) - x^2y^2.$$

Από αυτές τις δύο εξισώσεις παίρνει κανείς ότι $2y^2(8 - xy) = 2x^2(8 - xy) \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(8 - xy) = 0$, οπότε ή $x^2 = y^2$ ή $xy = 8$. Η $xy = 8$ είναι αδύνατη, διότι τότε θα είχαμε ότι $-64 = 0$ από την $2y^2(8 - xy) - x^2y^2 = 0$. Άρα πρέπει $x^2 = y^2$ και αφού είμαστε στο χωρίο $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\right\}$, παίρνουμε ότι $x = y$. Αντικαθιστώντας στην $2x^2(8 - xy) - x^2y^2 = 0$ παίρνει κανείς την εξίσωση $16x^2 - 2x^4 - x^4 = 0$, που δίνει $x^2 = 16/3$ και τελικά $x = 4/\sqrt{3}$, αφού $x > 0$. Άρα $y = 4/\sqrt{3}$ και η f σε αυτό το σημείο (x, y) ισούται με

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32}{3\sqrt{3}}.$$

Παρατηρείστε ότι όντως $xy = 16/3 < 16$ για αυτό το σημείο $(x, y) = (4/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3})$. Επίσης, ο Εσσιανός πίνακας της f είναι ο

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y^2(y^2 + 16)}{(x + y)^3} & \frac{xy[(16 - 3xy) - (x^2 + y^2)]}{(x + y)^3} \\ \frac{xy[(16 - 3xy) - (x^2 + y^2)]}{(x + y)^3} & -\frac{x^2(x^2 + 16)}{(x + y)^3}, \end{pmatrix}$$

που στο σημείο $(x, y) = (4/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3})$ ισούται με

$$Hf\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}}. \end{pmatrix}$$

Έχουμε ότι $-\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$ και η ορίζουσα του πίνακα είναι

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 > 0,$$

άρα ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, και το σημείο $(x, y) = (4/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3})$ αποτελεί σημείο τοπικού μεγίστου. Τέλος

$$z = \frac{16 - xy}{2(x + y)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

για $x = y = 4/\sqrt{3}$ και οι διαστάσεις που μεγιστοποιούν τον όγκο είναι οι $x = y = 4/\sqrt{3}$, $z = 2/\sqrt{3}$.

Παρατήρηση: Και με τις δύο μεθόδους παραπάνω, δεν αποδείξαμε ότι ο όγκος όντως μεγιστοποιείται, ότι δηλαδή υπάρχει όντως τριάδα x, y, z, με $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, που ικανοποιεί την συνθήκη $xy + 2xz + 2yz = 16$, και τέτοια ώστε $xyz \geqslant x'y'z'$ για κάθε άλλη τριάδα (x', y', z') που ικανοποιεί την $x'y' + 2x'z' + 2y'z' = 16$ και με $x' > 0$, $y' > 0$, $z' > 0$. Αυτό μπορεί να το αποδείξει κανείς ως εξής. Αν (x, y, z) είναι μία τριάδα με $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, που ικανοποιεί την συνθήκη $xy + 2xz + 2yz = 16$, τότε πρέπει $xy \leqslant 16$ και $2xz \leqslant 16$ και $2yz \leqslant 16$. Αν λοιπόν $x \geqslant 100$ τότε πρέπει (επειδή $xy \leqslant 16$ και $2xz \leqslant 16$)

$$xyz \leqslant 16z \leqslant 16\frac{8}{x} = \frac{128}{x} \leqslant 1.28 < \frac{32}{3\sqrt{3}}.$$

Όμοια αν $y \geqslant 100$ ή $z \geqslant 100$ πρέπει πάλι $xyz < 32/\left(3\sqrt{3}\right)$. Από την άλλη το σύνολο

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 100,\ 0 \leqslant y \leqslant 100,\ 0 \leqslant z \leqslant 100,\ xy + 2xz + 2yz = 16\right\}$$

είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) και κατά συνέπεια η συνεχής συνάρτηση $V(x, y, z) = xyz$ έχει μέγιστο στο σύνολο αυτό. Το μέγιστο αυτό θα εμφανίζεται ή στο «σύνορο» του B ή σε «εσωτερικό» σημείο δηλαδή σε σημείο του συνόλου

$$B^o = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 100,\ 0 < y < 100,\ 0 < z < 100,\ xy + 2xz + 2yz = 16\right\}$$

και τότε (δηλαδή στην δεύτερη περίπτωση) πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη πολλαπλασιαστών Lagrange. Άρα ή το μέγιστο είναι στο σημείο που βρήκαμε $(x, y, z) = \left(4/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}\right)$ ή το μέγιστο εμφανίζεται σε κάποιο σημείο (x, y, z) με $xy + 2xz + 2yz = 16$ και ή $x = 0$ ή $x = 100$ ή $y = 0$ ή $y = 100$ ή $z = 0$ ή $z = 100$. Επειδή $V(x, y, z) = 0$ αν κάποιο από τα x ή y ή z είναι μηδέν, και επειδή το

$$V(x, y, z) = xyz \leqslant 1.28 < \frac{32}{3\sqrt{3}} = V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

όταν κάποιο από τα x ή y ή z είναι εκατό, έπεται ότι το μέγιστο της V στο σύνολο B είναι όντως το $V(4/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geqslant V(x, y, z)$$

για κάθε $(x, y, z) \in B$. Αφού ισχύει επίσης ότι

$$V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geqslant V(x, y, z)$$

για κάθε (x, y, z) με $xy + 2xz + 2yz = 16$ και $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ με τουλάχιστον ένα από τα $x, y, z \geqslant 100$, δηλαδή η ανισότητα αυτή ισχύει επίσης στο σύνολο

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ xy + 2xz + 2yz = 16\right\} \setminus B,$$

έπεται ότι η ανισότητα

$$V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geqslant V(x, y, z)$$

ισχύει για κάθε (x,y,z) στο σύνολο $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0,\ z>0,\ xy+2xz+2yz=16\right\}$ και άρα τελικά

$$V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \max\left\{V(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0,\ z>0,\ xy+2xz+2yz=16\right\}.$$

5. (1 μον.) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_A (x^2+y^2)^{-2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες $x^2+y^2 \leqslant 1$ και $x+y \geqslant 1$.

Λύση: Θα χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες: $y = r\cos t$, $x = r\sin t$. Τα σημεία στο ημιεπίπεδο $x+y \geqslant 1$ ικανοποιούν την ανισότητα $r\cos t + r\sin t \geqslant 1 \Leftrightarrow r(\cos t + \sin t) \geqslant 1$ σε πολικές συντεταγμένες. Επειδή δε $r>0$, πρέπει και $\cos t + \sin t > 0$ για να ικανοποιείται αυτή η ανισότητα και τότε είναι ισοδύναμη με την

$$r \geqslant \frac{1}{\cos t + \sin t}.$$

Όμως

$$\cos t + \sin t \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$$

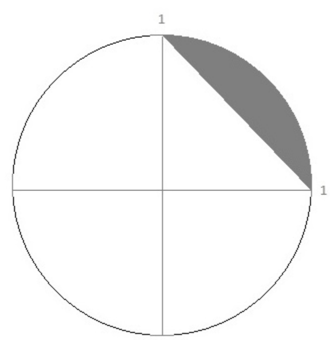
και αυτή, για $t \in [0, 2\pi)$ ικανοποιείται μόνο αν $t \in [0, \pi/2]$. Τα σημεία στο εσωτερικό του κύκλου $x^2+y^2=1$ από την άλλη ικανοποιούν την ανισότητα

$$r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad r \leqslant 1.$$

Άρα τελικά το χωρίο ολοκλήρωσης $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$ σε πολικές συντεταγμένες γράφεται ως

$$\left\{(r,t) : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{1}{\cos t + \sin t} \leqslant r \leqslant 1\right\}.$$

Εναλλακτικά, το χωρίο ολοκλήρωσης A σε πολικές συντεταγμένες μπορεί κανείς να το βρει και γεωμετρικά από το παρακάτω σχήμα.



Επομένως, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής για πολικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} &= \int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\cos t+\sin t}}^{1} r\frac{1}{(r^2)^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\cos t+\sin t}}^{1} \frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos t + \sin t}\right)^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [(\cos t + \sin t)^2 - 1] \,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \sin t \,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

6. (1 μον.) Έστω $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, D ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας ένα στο επίπεδο και $E = T(D)$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Λύση: Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής μεταβλητής,

$$
\begin{aligned}
\iint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \iint_E f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{T(D)} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D f(T(u, v)) \left|\det(J_T(u, v))\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D f(u^2 - v^2, 2uv)) \left|\det(J_T(u, v))\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \frac{1}{\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2}} \left|\det(J_T(u, v))\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \frac{1}{\sqrt{(u^2 + v^2)^2}} \left|\det(J_T(u, v))\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \frac{1}{u^2 + v^2} \left|\det(J_T(u, v))\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

και επειδή

$$J_T(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix},$$

και άρα
$$\left|\det(J_T(u,v))\right| = 4u^2 + 4v^2,$$
έχουμε ότι τελικά
$$\iint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_D \frac{1}{u^2+v^2} 4(u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D 4\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\pi,$$
αφού $\iint_D 1\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \text{εμβαδόν}(D) = \pi$.

Ο υπολογισμός αυτός θα ήταν σωστός αν ο μετασχηματισμός T ήταν $1-1$ πάνω στο χωρίο D, το οποίο εδώ το θεωρούμε να είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος, όπως απαιτεί το θεώρημα για τον τύπο αλλαγής μεταβλητής που χρησιμοποιήσαμε. Δεν είναι όμως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, εκτός του $(x,y) = (0,0)$, υπάρχουν δύο ζευγάρια $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $T(u,v) = (x,y)$: είναι οι λύσεις των εξισώσεων $u^2 - v^2 = x$ και $2uv = y$, επομένως τα ζευγάρια
$$u = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}} \quad , \quad v = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$
και
$$u = -\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}} \quad , \quad v = -\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}.$$
(Για $(x,y) = (0,0)$ υπάρχει μόνο η λύση $(u,v) = (0,0)$ των εξισώσεων $T(u,v) = (0,0)$.) Αυτές οι λύσεις δείχνουν ότι αν πάρουμε για D' τον πάνω μισό ανοικτό δίσκο, δηλαδή
$$D' := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u^2+v^2 < 1,\ v > 0\right\},$$
τότε η T είναι $1-1$ πάνω στο D', δηλαδή υπάρχει το πολύ μία λύση των εξισώσεων $T(u,v) = (x,y)$ με $v > 0$. Επίσης δεν υπάρχει λύση των εξισώσεων $T(u,v) = (x,y)$ με $v > 0$ αν και μόνο αν $x \geqslant 0$ και $y = 0$, γιατί τότε υπάρχουν μόνο λύσεις με $v = 0$. Άρα έχουμε ότι
$$T(D') = E \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0,\ y = 0\right\} = E \setminus ([0,+\infty) \times \{0\}).$$
Επειδή το σύνολο $E \cap ([0,+\infty)\times\{0\})$ έχει περιεχόμενο μηδέν, το ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης πάνω στο σύνολο E και πάνω στο σύνολο $E \setminus ([0,+\infty)\times\{0\})$ είναι ίδια (το ολοκλήρωμα πάνω στο $[0,+\infty)\times\{0\}$ είναι μηδέν). Επομένως τελικά υπολογίζουμε όπως ακριβώς και παραπάνω ότι
$$\begin{aligned}
\iint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \iint_{E\setminus([0,+\infty)\times(\{0\})} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \iint_{D'} f(T(u,v)) \left|\det(J_T(u,v))\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_{D'} 4\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 4\text{εμβαδόν}(D') \\
&= 4\frac{\pi}{2} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να αποφύγει κανείς τον τύπο αλλαγής μεταβλητής, υπολογίζοντας απευθείας το $E = T(D)$. Παρατηρεί κανείς ότι $E = T(D)$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος επίσης. Πράγματι, αν $(u, v) \in D$, δηλαδή $u^2+v^2 < 1$, τότε οι συντεταγμένες $x = u^2-v^2$ και $y = 2uv$ του $T(u, v)$ ικανοποιούν την

$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 < 1^2 = 1,$$

και επομένως $T(u, v) = (x, y) \in D$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $E \subseteq D$. Χρησιμοποιώντας τώρα και τις λύσεις των εξισώσεων $T(u, v) = (x, y)$ που βρήκαμε παραπάνω, βλέπει κανείς ότι για κάθε (x, y) στον μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή κάθε (x, y) με $x^2 + y^2 < 1$, υπάρχει τουλάχιστον ένα (u, v) τέτοιο ώστε $T(u, v) = (x, y)$ (συγκεκριμένα υπάρχουν δύο λύσεις (u, v) αλλά μας φθάνει μία), και χρησιμοποιώντας τους τύπους για αυτές τις λύσεις έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= \frac{y^2}{2\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} + \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \\
&= \frac{y^2 + \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{2\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} \\
&= \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{x^2 + y^2}}{2\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2x}\right)}{2\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} < 1,
\end{aligned}$$

δηλαδή το (u, v) ανήκει επίσης στον μοναδιαίο δίσκο D. Αυτό δείχνει ότι κάθε (x, y) στο D είναι εικόνα $T(u, v)$ για κάποιο (u, v) στο D, δηλαδή ότι $D \subseteq E$. Άρα τελικά πρέπει $E = D$. Επομένως,

$$\iint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi,$$

χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες για το ολοκλήρωμα στον δίσκο D.

Τέλος ένας τρίτος τρόπος είναι να περάσουμε σε πολικές συντεταγμένες από την αρχή. Το D σε πολικές συντεταγμένες είναι το σύνολο $\Delta = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) : r < 1\} = [0, 1) \times [0, 2\pi)$. Σε πολικές συντεταγμένες $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, άρα

$$T(u, v) = (r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta), 2r^2\cos\theta\sin\theta) = (r^2\cos(2\theta), r^2\sin(2\theta)),$$

και καθώς το (r, θ) διαγράφει το σύνολο $[0, 1) \times [0, 2\pi)$, το $T(u, v)$ διαγράφει τον μοναδιαίο δίσκο ακριβώς (τον διαγράφει ακριβώς δύο φορές, εκτός του σημείου $(0, 0)$). Άρα $E = T(D)$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος πάλι και υπολογίζει πάλι κανείς όπως πριν

$$\iint_E \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi.$$

Σχόλιο: Αντί του D' που θεωρήσαμε στον πρώτο τρόπο παραπάνω, όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον κάτω μισό ανοικτό δίσκο, $D' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1,\ v < 0\right\}$· οι τύποι δείχνουν ότι η εξίσωση $T(u,v) = (x,y)$ έχει ακριβώς μία λύση (u,v) με $v < 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \notin [0,+\infty) \times \{0\}$ (για (x,y) με $y = 0$ και $x \geqslant 0$ δεν υπάρχουν λύσεις με $v \neq 0$· και οι δύο λύσεις έχουν $v = 0$). Παρόμοιοι συλλογισμοί δείχνουν ότι θα μπορούσε κανείς εξίσου καλά να πάρει τον δεξιό μισό ανοικτό δίσκο $D'' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1,\ u > 0\right\}$, ή τον αριστερό μισό ανοικτό δίσκο· ο μετασχηματισμός T είναι $1-1$ και σε καθέναν από αυτούς τους μισούς δίσκους.

7. (1 μον.) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma 2xyz\,\mathrm{d}x + x^2 z\,\mathrm{d}y + x^2 y\,\mathrm{d}z$, όπου γ είναι η καμπύλη $\gamma(t) = (1, \mathrm{e}^{\cos t}, \mathrm{e}^{\sin t})$, $t \in [0,\pi]$.

Λύση: Έστω $P, Q, R \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $P(x,y,z) = 2xyz$, $Q(x,y,z) = x^2 z$ και $R(x,y,z) = x^2 y$. Έστω και $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 yz$. Τότε $\nabla f = (P,Q,R)$ δηλαδή

$$\nabla f(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

Επομένως η διαφορική μορφή $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ είναι ακριβής και άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_\gamma 2xyz\,\mathrm{d}x + x^2 z\,\mathrm{d}y + x^2 y\,\mathrm{d}z = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1, \mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^0) - f(1, \mathrm{e}^1, \mathrm{e}^0) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^1 = \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}.$$

Εναλλακτικά μπορεί κανείς να υπολογίσει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα απευθείας. Έχουμε ότι

$$\gamma'(t) = (0, -\sin t\,\mathrm{e}^{\cos t}, \cos t\,\mathrm{e}^{\sin t}), \qquad t \in [0,\pi].$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_\gamma 2xyz\mathrm{d}x + x^2 z\mathrm{d}y + x^2 y\mathrm{d}z &= \int_0^\pi [P(\gamma(t))(0) + Q(\gamma(t))\,(-\sin t\,\mathrm{e}^{\cos t}) + R(\gamma(t)\,(\cos t\,\mathrm{e}^{\sin t})]\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi [\mathrm{e}^{\sin t}\,(-\sin t\,\mathrm{e}^{\cos t}) + \mathrm{e}^{\cos t}\cos t\,\mathrm{e}^{\sin t}]\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\cos t - \sin t)\,\mathrm{e}^{\sin t + \cos t}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \left(\mathrm{e}^{\sin t + \cos t}\right)'\ \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{\sin\pi + \cos\pi} - \mathrm{e}^{\sin 0 + \cos 0} \\
&= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

8. (1 μον.) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \left(\ln(1+x^2) - y\mathrm{e}^{xy} + y\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^2 - x\mathrm{e}^{xy} + \sqrt{1+y^4}\right)\,\mathrm{d}y,$$

όπου γ η καμπύλη που αποτελείται από το άνω μισό της έλλειψης $x^2+4y^2 = 4$ μαζί με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(-2, 0)$ και $(2, 0)$, διεγραμμένη με την φορά που κινούνται οι δείκτες του ρολογιού.

Λύση: Από το θεώρημα Green

$$\int_{-\gamma} \left(\ln(1+x^2) - y\mathrm{e}^{xy} + y\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 - x\mathrm{e}^{xy} + \sqrt{1+y^4}\right) \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

όπου

$$P(x,y) := \ln(1+x^2) - y\mathrm{e}^{xy} + y \qquad \text{και} \qquad Q(x,y) := x^2 - x\mathrm{e}^{xy} + \sqrt{1+y^4}$$

και D το χωρίο που φράσσει η γ. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι στην καμπύλη $-\gamma$ γιατί η καμπύλη γ καθώς διαγράφεται έχει το χωρίο D στα δεξιά της, άρα η $-\gamma$ καθώς διαγράφεται έχει το χωρίο D στα αριστερά της, όπως απαιτεί το θεώρημα Green. Η εξίσωση της έλλειψης, αν λύσουμε ως προς y, για $y \geqslant 0$, αφού θέλουμε το άνω μισό, δίνει ότι το χωρίο D γράφεται ως

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},\ -2 \leqslant x \leqslant 2\right\}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} [(2x - \mathrm{e}^{xy} - xy\mathrm{e}^{xy}) - (-\mathrm{e}^{xy} - xy\mathrm{e}^{xy} + 1)]\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} (2x-1)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} (2x-1) \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-2}^{2} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα κάνει μηδέν, επειδή η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε είναι περιττή και το ολοκλήρωμα είναι σε ένα συμμετρικό γύρω από το μηδέν διάστημα, το $[-2, 2]$. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x/2 = \sin t$, οπότε $\mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$· παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, \mathrm{d}t \\
&= -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cos t\, \mathrm{d}t \\
&= -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(2t) + 1]\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t)\mathrm{d}t - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta - \pi$$
$$= -\pi.$$

Επομένως

$$\int_\gamma \Big(\ln(1+x^2) - ye^{xy} + y\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(x^2 - xe^{xy} + \sqrt{1+y^4}\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$= -\int_{-\gamma} \Big(\ln(1+x^2) - ye^{xy} + y\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(x^2 - xe^{xy} + \sqrt{1+y^4}\Big)\,\mathrm{d}y = \pi.$$

9. (1 μον.) Να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\iiint_A x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, όπου A το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=2$ και την επιφάνεια $z = x^2+y^2$.

Λύση: Το χωρίο ολοκλήρωσης A περιγράφεται από τις ανισότητες $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \leqslant 2$ και $z \geqslant x^2+y^2$. Σημειώνεται ότι η περιγραφή του A δεν ήταν αρκούντως πλήρης και μπορούσε κανείς εξίσου καλά να πάρει το A να είναι ένα από τα χωρία που περιγράφοντα από τις παρακάτω ανισότητες:

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x \leqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \leqslant 2,\ \ z \geqslant x^2+y^2\}$$

ή

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x \geqslant 0,\ \ y \leqslant 0,\ \ z \leqslant 2,\ \ z \geqslant x^2+y^2\}$$

ή

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x \leqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \leqslant 2,\ \ z \geqslant x^2+y^2\}$$

ή

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x \leqslant 0,\ \ y \leqslant 0,\ \ z \leqslant 2,\ \ z \geqslant x^2+y^2\}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι (έχοντας πάρει την πρώτη εκδοχή για το A)

$$\iiint_A x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_B x[2-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

όπου B το χωρίο

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 2,\ \ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0\}$$

στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα το υπολογίζουμε σε πολικές συντεταγμένες.

$$\iiint_A x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_B x[2-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} r\cos t\,(2-r^2)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$
$$= \left(\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}} r^2(2-r^2)\,\mathrm{d}r\right)$$
$$= 1\cdot\left(2\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5}\right) =$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

Εναλλακτικά μπορεί κανείς να υπολογίσει το ολοκλήρωμα πάνω στο B χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini.

$$\begin{aligned}
\iiint_A x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_B x[2-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x[2-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left[x(2-x^2)\sqrt{2-x^2} - x\frac{\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3}{3}\right]\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{3}\int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
(y=2-x^2) \qquad &= \tfrac{1}{3}\int_0^2 y^{3/2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

10. (1 μον.) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$, όπου S η επιφάνεια της σφαίρας με κέντρο στο σημείο $(0,0,0)$ και ακτίνα ένα, παραμετρικοποιημένη έτσι ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς το εξωτερικό της σφαίρας.

Λύση: *1ος τρόπος: θεώρημα Gauss*. Το θεώρημα Gauss συνδέει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα με ένα τριπλό ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα,

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iiint_U\left[\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

όπου S μια κλειστή επιφάνεια και U το εσωτερικό της. Στην περίπτωση που δίνεται, έχουμε $P(x,y,z)=x$, $R(x,y,z)=z$ και $Q(x,y,z)=y$, επειδή η διαφορική μορφή που δίνεται έχει τον όρο $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$ ενώ το θεώρημα Gauss απαιτεί όρο $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ και αυτό ισούται με $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$. Άρα το θεώρημα Gauss δίνει

$$\begin{aligned}
\iint_S z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z &= \iint_S x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \iiint_U (1+1+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 3\iiint_U \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 3\text{όγκος}(U) \\
&= 4\pi,
\end{aligned}$$

όπου U η μοναδιαία σφαίρα $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}$, της οποίας ο όγκος είναι $4\pi/3$. Πράγματι, σε σφαιρικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned}
\text{όγκος}(U) = \iiint_U \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}r = [(-\cos\pi)-(-\cos 0)]2\pi\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος: απευθείας υπολογισμός από τον ορισμό επιφανειακού ολοκληρώματος. Παραμετρικοποιούμε την επιφάνεια της σφαίρας όπως στις σφαιρικές συντεταγμένες: $\Sigma\colon [0,2\pi)\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$,

$$\Sigma(t,s) = (\cos t\sin s, \sin t\sin s, \cos s) \qquad (t,s)\in[0,2\pi)\times[0,\pi],$$

δηλαδή

$$\Sigma(t,s) = (\chi(t,s), \psi(t,s), \zeta(t,s)),$$

όπου

$$\chi(t,s) = \cos t\sin s \qquad \psi(t,s) = \sin t\sin s \qquad \zeta(t,s) = \cos s.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}\left(\cos s\,\det\left(\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) + \cos t\sin s\,\det\left(\frac{\partial(\psi,\zeta)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) - \sin t\sin s\,\det\left(\frac{\partial(\chi,\zeta)}{(t,s)}(t,s)\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}\left(\cos s\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\chi}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix} + \cos t\sin s\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\zeta}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix} - \sin t\sin s\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\chi}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\zeta}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}\left(\cos s\begin{vmatrix}-\sin t\sin s & \cos t\cos s\\ \cos t\sin s & \sin t\cos s\end{vmatrix} + \cos t\sin s\begin{vmatrix}\cos t\sin s & \sin t\cos s\\ 0 & -\sin s\end{vmatrix} -\right.\\
&\qquad\qquad\left.\sin t\sin s\begin{vmatrix}-\sin t\sin s & \cos t\cos s\\ 0 & -\sin s\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}[\cos s\,(-\sin^2 t\sin s\cos s - \cos^2 t\sin s\cos s) + \cos t\sin s\,(-\cos t\sin^2 s)\\
&\qquad\qquad - \sin t\sin s\,(-\sin t\sin^2 s)]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}[-\cos s\,(\sin s\cos s) - \cos^2 t\sin^3 s - \sin^2 t\sin^3 s]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}[-\cos^2 s\sin s - (\cos^2 t + \sin^2 t)\sin^3 s]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}(-\cos^2 s\sin s - \sin^3 s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}(\cos^2 s + \sin^2 s)(-\sin s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]}(-\sin s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(-\sin s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi}(-2)\,\mathrm{d}t\\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

Βρίσκουμε τώρα τον προσανατολισμό της επιφάνειας με την παραμετρικοποίηση Σ. Το διάνυσμα

$$N_\Sigma(t,s) = \left(\det\left(\frac{\partial(\psi,\zeta)}{\partial(t,s)}(t,s)\right), \det\left(\frac{\partial(\zeta,\chi)}{\partial(t,s)}(t,s)\right), \det\left(\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(t,s)}(t,s)\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\zeta}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\zeta}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\chi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\chi}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial\chi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\chi}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{vmatrix} \cos t\sin s & 0 \\ \sin t\cos s & -\sin s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -\sin t\sin s \\ -\sin s & \cos t\cos s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin t\sin s & \cos t\sin s \\ \cos t\cos s & \sin t\cos s \end{vmatrix} \right) \\
&= (-\cos t\sin^2 s, -\sin t\sin^2 s, -\sin^2 t\sin s\cos s - \cos^2 t\sin s\cos s) \\
&= (-\cos t\sin^2 s, -\sin t\sin^2 s, -(\sin^2 t + \cos^2 t)\sin s\cos s) \\
&= (-\cos t\sin^2 s, -\sin t\sin^2 s, -\sin s\cos s)
\end{aligned}
$$

είναι κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο $\Sigma(t,s)$ και έχει μήκος

$$
\begin{aligned}
\left\| N_\Sigma(t,s) \right\| &= \sqrt{\cos^2 t\sin^4 s + \sin^2 t\sin^4 s + \sin^2 s\cos^2 s} \\
&= \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)\sin^4 s + \sin^2 s\cos^2 s} \\
&= \sqrt{\sin^4 s + \sin^2 s\cos^2 s} \\
&= \sqrt{\sin^2 s(\sin^2 s + \cos^2 s)} \\
&= \sqrt{\sin^2 s} \\
&= \sin s,
\end{aligned}
$$

η τελευταία ισότητα επειδή $s \in [0,\pi]$ και άρα $\sin s \geqslant 0$. Επομένως το διάνυσμα

$$
\frac{N_\Sigma(t,s)}{\left\| N_\Sigma(t,s) \right\|} = (-\cos t\sin s, -\sin t\sin s, -\cos s) = -\Sigma(t,s)
$$

είναι το μοναδιαίο κάθετο στην σφαίρα στο σημείο $\Sigma(t,s)$ και αυτό έχει φορά προς το εσωτερικό της σφαίρας. Αφού ζητείται το επιφανειακό ολοκλήρωμα με παραμετρικοποίηση που δίνει μοναδιαίο κάθετο με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σφαίρας, έπεται ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το $-(-4\pi) = 4\pi$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε την σφαίρα ως $S\colon [0,2\pi)\times[-\pi/2,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$,

$$
S(t,s) = (\cos t\cos s, \sin t\cos s, \sin s) \qquad (t,s) \in [0,2\pi)\times[-\pi/2,\pi/2],
$$

δηλαδή

$$
S(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)),
$$

όπου

$$
x(t,s) = \cos t\cos s \qquad y(t,s) = \sin t\cos s \qquad z(t,s) = \sin s.
$$

Παρατηρείστε ότι $S(t,s) = \Sigma(t,\pi/2 - s)$ για κάθε $(t,s) \in [0,2\pi)\times[-\pi/2,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$. Το διάνυσμα

$$
\begin{aligned}
N_S(t,s) &= \left(\det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}(t,s) \right), \det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}(t,s) \right), \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}(t,s) \right) \right) \\
&= \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial z}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial z}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{vmatrix} \cos t\cos s & 0 \\ -\sin t\sin s & \cos s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -\sin t\cos s \\ \cos s & -\cos t\sin s \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin t\cos s & \cos t\cos s \\ -\cos t\sin s & -\sin t\sin s \end{vmatrix} \right) \\
&= (\cos t\cos^2 s, \sin t\cos^2 s, \sin^2 t\sin s\cos s + \cos^2 t\sin s\cos s) \\
&= (\cos t\cos^2 s, \sin t\cos^2 s, (\sin^2 t + \cos^2 t)\sin s\cos s) \\
&= (\cos t\cos^2 s, \sin t\cos^2 s, \sin s\cos s)
\end{aligned}
$$

είναι κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο $S(t,s)$ και έχει μήκος

$$\begin{aligned}
\left\|N_S(t,s)\right\| &= \sqrt{\cos^2 t\cos^4 s+\sin^2 t\cos^4 s+\sin^2 s\cos^2 s}\\
&= \sqrt{(\cos^2 t+\sin^2 t)\cos^4 s+\sin^2 s\cos^2 s}\\
&= \sqrt{\cos^4 s+\sin^2 s\cos^2 s}\\
&= \sqrt{(\cos^2 s+\sin^2 s)\cos^2 s)}\\
&= \sqrt{\cos^2 s}\\
&= \cos s,
\end{aligned}$$

η τελευταία ισότητα επειδή $s\in[-\pi/2,\pi/2]$ και άρα $\cos s\geqslant 0$. Επομένως το διάνυσμα

$$\frac{N_S(t,s)}{\left\|N_S(t,s)\right\|}=(\cos t\cos s,\sin t\cos s,\sin s)=S(t,s)$$

είναι το μοναδιαίο κάθετο στην σφαίρα στο σημείο $S(t,s)$ και έχει αυτήν την φορά κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σφαίρας. Όπως και πριν, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς αυτήν την παραμετρικοποίηση ως

$$\begin{aligned}
&\iint_S z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\left(\sin s\,\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}(t,s)\right)+\cos t\cos s\,\det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}(t,s)\right)-\sin t\cos s\,\det\left(\frac{\partial(x,z)}{(t,s)}(t,s)\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\left(\sin s\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix}+\cos t\cos s\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial z}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial z}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix}-\sin t\cos s\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial z}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial z}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\left(\sin s\begin{vmatrix}-\sin t\cos s & -\cos t\sin s\\ \cos t\cos s & -\sin t\sin s\end{vmatrix}+\cos t\cos s\begin{vmatrix}\cos t\cos s & -\sin t\sin s\\ 0 & \cos s\end{vmatrix}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\sin t\cos s\begin{vmatrix}-\sin t\cos s & -\cos t\sin s\\ 0 & \cos s\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}[\sin s\,(\sin^2 t\sin s\cos s+\cos^2 t\sin s\cos s)+\cos t\cos s\,(\cos t\cos^2 s)\\
&\qquad\qquad-\sin t\cos s\,(-\sin t\cos^2 s)]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}[\sin^2 s\cos s\,(\sin^2 t+\cos^2 t)+\cos^2 t\cos^3 s+\sin^2 t\cos^3 s]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}[\sin^2 s\cos s+(\cos^2 t+\sin^2 t)\cos^3 s]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\sin^2 s\cos s+\cos^3 s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\sin^2 s+\cos^2 s)\cos s\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\iint_{[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\cos s\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 2 \, \mathrm{d}t \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Ένας άλλος τρόπος να πάρουμε μία παραμετρικοποίηση που να δίνει προσανατολισμό αντίθετο από την αρχική Σ που χρησιμοποιήσαμε και που δουλεύει πάντα, είναι να αλλάξουμε την σειρά των παραμέτρων t και s. Συγκεκριμένα ορίζουμε $S\colon [0,\pi]\times[0,2\pi)$ ως $S(t,s) = \Sigma(s,t)$· εν προκειμένω

$$
S(t,s) = (\sin t \cos s, \sin t \sin s, \cos t) \qquad (t,s) \in [0,\pi] \times [0,2\pi).
$$

Με τον συμβολισμό $[S] = \{S(t,s)\colon (t,s) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]\}$ και $[\Sigma] = \{\Sigma(t,s)\colon (t,s) \in [0,\pi] \times [0,2\pi)\}$ για τα σύνολα τιμών των παραμετρικοποιήσεων S και Σ, αντίστοιχα, έχει κανείς ότι για κάθε σημείο $\Sigma(t,s)$ του συνόλου $[\Sigma]$, ισχύει ότι $(t,s) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]$, άρα $(s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi)$ και αφού $S(t,s) = \Sigma(s,t)$, το $\Sigma(t,s)$ ανήκει στο σύνολο $[S]$. Αυτό δείχνει ότι $[\Sigma] \subseteq [S]$. Και όμοια, για κάθε σημείο $S(t,s)$ του συνόλου S, ισχύει ότι $(t,s) \in [0,\pi] \times [0,2\pi)$, άρα $(s,t) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]$ και αφού $S(t,s) = \Sigma(s,t)$, το $S(t,s)$ ανήκει στο σύνολο $[\Sigma]$. Αυτό δείχνει ότι $[S] \subseteq [\Sigma]$ και άρα τελικά $[\Sigma] = [S]$. Δηλαδή, η παραμετρικοποίηση S έχει το ίδιο σύνολο τιμών με την Σ και άρα αποτελεί παραμετρικοποίηση της σφαίρας.

Έχουμε τώρα ότι $S(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ με $x(t,s) = \chi(s,t)$, $y(t,s) = \psi(s,t)$ και $z(t,s) = \zeta(s,t)$· άρα

$$
\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \chi}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial \chi}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t) \end{vmatrix} = -\det\left(\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(t,s)}(s,t)\right)
$$

και όμοια

$$
\det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) = -\det\left(\frac{\partial(\zeta,\chi)}{\partial(t,s)}(s,t)\right)
$$

και

$$
\det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) = -\det\left(\frac{\partial(\psi,\zeta)}{\partial(t,s)}(s,t)\right),
$$

οπότε

$$
N_S(t,s) = -N_\Sigma(s,t),
$$

δηλαδή η S έχει όντως αντίθετο κάθετο διάνυσμα από την Σ, δηλαδή αντίθετο προσανατολισμό. Τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial \chi}{\partial s}(s,t), & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) &= \frac{\partial \chi}{\partial t}(s,t), \\
\frac{\partial y}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t), & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t), \\
\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s,t), & \frac{\partial z}{\partial s}(t,s) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}(s,t)
\end{aligned}
$$

τις βλέπει κανείς άμεσα από τον ορισμό της μερικής παραγώγου: για παράδειγμα,

$$
\frac{\partial x}{\partial t}(t,s) = \lim_{\tau\to 0} \frac{x(t+\tau,s) - x(t,s)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\chi(s,t+\tau) - x(s,t)}{\tau} = \frac{\partial \chi}{\partial s}(s,t),
$$

και όμοια για όλες τις άλλες μερικές παραγώγους. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ότι

$$
\begin{aligned}
&\iint_S z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\
&= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \left(\cos t\ \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) + \sin t\cos s\ \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}(t,s)\right) - \sin t \sin s\ \det\left(\frac{\partial(x,z)}{(t,s)}(t,s)\right)\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \left(\cos t\left[-\det\left(\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(t,s)}(s,t)\right)\right] + \sin t\cos s\left[-\det\left(\frac{\partial(\psi,\zeta)}{\partial(t,s)}(s,t)\right)\right] - \sin t\sin s\left[-\det\left(\frac{\partial(\chi,\zeta)}{(t,s)}(s,t)\right)\right]\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= -\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

3ος τρόπος: απευθείας υπολογισμός από τον εναλλακτικό ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος. Αν $S\colon D \to \mathbb{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση της σφαίρας, με $S(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$, $(t,s) \in D$, έστω πάλι

$$N(t,s) = \left(\det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}(t,s)\right),\ \det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}(t,s)\right),\ \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}(t,s)\right)\right)$$

και

$$\nu(t,s) = \frac{N(t,s)}{\left\|N(t,s)\right\|} \qquad (t,s) \in D$$

το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια, όπου υποθέτουμε ότι η παραμετρικοποίηση είναι τέτοια ώστε το διάνυσμα $\nu(t,s)$ να δείχνει προς το εξωτερικό της σφαίρας, για κάθε $(t,s) \in D$. Αν

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

(ή $F(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$ με εναλλακτικό συμβολισμό) είναι ένα διανυσματικό πεδίο, τότε

$$
\begin{aligned}
\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \iint_D \langle F(S(t,s)), \mathbb{N}(t,s)\rangle\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \iint_D \langle F(S(t,s)), \nu(t,s)\rangle \left\|N(t,s)\right\|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Για το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει πρέπει να πάρουμε (επειδή $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$)

$$P(x,y,z) = x, \quad Q(x,y,z) = y, \quad R(x,y,z) = z.$$

Επίσης, αν γράψουμε $(x,y,z) = S(t,s)$ για το τυχόν σημείο $S(t,s)$ στην επιφάνεια της σφαίρας, και κατόπιν γράψουμε $\nu(x,y,z) = \nu(t,s)$ (για το συγκεκριμένο $(t,s) \in D$ για το οποίο $(x,y,z) = S(t,s)$), τότε

$$\nu(x,y,z) = (x,y,z)$$

για την σφαίρα, γιατί το διάνυσμα (x,y,z) είναι μοναδιαίο (έχει δηλαδή μήκος ένα όταν το (x,y,z) ανήκει στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας), δείχνει προς το εξωτερικό της σφαίρας και είναι κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας (στην σφαίρα η ακτίνα είναι κάθετη στην επιφάνειά της). Έπεται ότι

$$\langle F(x,y,z), \nu(x,y,z)\rangle = \langle (x,y,z), (x,y,z)\rangle = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

για κάθε (x, y, z) στην επιφάνεια της σφαίρας. Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μας γίνεται

$$\begin{aligned}\iint_S z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z &= \iint_D \langle F(S(t,s)), \nu(t,s)\rangle \left\|N(t,s)\right\| \,\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \iint_D \left\|N(t,s)\right\| \,\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \text{εμβαδόν}([S]),\end{aligned}$$

ισούται δηλαδή με το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας. Αυτό όμως υπολογίζεται εύκολα χωρίς να μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός που δίνει η παραμετρικοποίηση που θα χρησιμοποιήσουμε. Αν χρησιμοποιήσουμε την παραμετρικοποίηση $\Sigma(t,s) = (\cos t \sin s, \sin t, \sin s, \cos s)$ $(t,s) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, που προκύπτει από τις πολικές συντεταγμένες, είδαμε παραπάνω ότι $\left\|N_\Sigma(t,s)\right\| = \sin s$, και άρα υπολογίζουμε ότι

$$\text{εμβαδόν}([S]) = \text{εμβαδόν}([\Sigma]) = \iint_{[0,2\pi)\times[0,\pi]} \sin s \,\mathrm{d}t\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^\pi \sin s\,\mathrm{d}s = 2\pi[(-\cos\pi) - (-\cos 0)] = 4\pi.$$