ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί το διαφορικό της $\vec{f}: \Re^2 \to \Re^2$, με:

$$\vec{f}(x,y) = (x+y, x^2 y)$$

Λύση

Ορίζουμε $f_1(x,y) = x + y$ και $f_2(x,y) = x^2 y$. Οι f_1, f_2 είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x^2$$

Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι συνεχείς, άρα οι f_1, f_2 είναι διαφορίσιμες στο $\Re^2$, με:

$$df_1(\overrightarrow{x_0})\left(\vec{h}\right) = \nabla f_1(\overrightarrow{x_0}) \cdot \vec{h} = h_1 + h_2$$

$$df_2(\overrightarrow{x_0})\left(\vec{h}\right) = \nabla f_2(\overrightarrow{x_0}) \cdot \vec{h} = 2xyh_1 + x^2 h_2,$$

$$\forall \overrightarrow{x_0} = (x,y) \in \Re^2 \text{ και } \vec{h} = (h_1, h_2).$$

Τελικά,

$$d\vec{f}(x,y)\left(\vec{h}\right) = \left(df_1(x,y)\left(\vec{h}\right), df_2(x,y)\left(\vec{h}\right)\right)$$

$$= (h_1 + h_2, 2xyh_1 + x^2 h_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

2. Να βρεθεί το ολικό διαφορικό της $f: \Re^3 \to \Re$, με:

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{xz}$$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2 + yze^{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy + e^{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xye^{xz}$$

Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, επομένως υπάρχει το ολικό διαφορικό της, με:

$$df(x,y,z) = (y^2 + yze^{xz})dx + (2xy + e^{xz})dy + xye^{xz}dz$$

3. Αν $W(x,y,z) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, να αποδείξετε ότι:

$$x\frac{\partial W}{\partial x} + y\frac{\partial W}{\partial y} + z\frac{\partial W}{\partial z} = 3W$$

Λύση

Θέτουμε $u = \frac{y}{x}$ και $v = \frac{z}{x}$. Έχουμε:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial x^3 f(u,v)}{\partial x} = 3x^2 f(u,v) + x^3\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} =$$

$$3x^2 f(u,v) + x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= 3x^2 f(u,v) - xy \frac{\partial f}{\partial u} - xz \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial x^3 f(u,v)}{\partial y} = x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial y}$$

$$= x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial x^3 f(u,v)}{\partial z} = x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial z}$$

$$= x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + x^3 \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = x^2 \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$

Τελικά,

$$x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} + z \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$= 3x^3 f(u,v) - x^2 y \frac{\partial f}{\partial u} - x^2 z \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$

$$+ x^2 y \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} + x^2 z \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = 3W$$

4. Θεωρούμε την $f: \Re^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \Re$, με:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

και

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, μέσω καμπυλών:

$$f(x,0) = 0$$

$$f(x,x) = 1$$

Επομένως, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

5. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης:

$$f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^4$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^2$, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x-y)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3$$

Επομένως, $\nabla f(x,y) = (4(x-y)^3, -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3)$.

Λύνουμε:

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-y)^3 = 0 \quad (\mathbf{1}) \\ -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3 = 0 \quad (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Από αντικατάσταση της $(\mathbf{1})$ στην $(\mathbf{2})$ προκύπτει ότι:

$$4(y-1)^3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Για $y = 1$ η $(\mathbf{1})$ γράφεται:

$$4(x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Οπότε, εξετάζουμε το σημείο $(1,1)$.

Βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12(x-y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12(x-y)^2 + 12(y-1)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -12(x-y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -12(x-y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 0$$

Παρατηρούμε ότι $\Delta_2 = det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, οπότε μέσω Εσσιανού πίνακα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Όμως:

$$f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^4 \geq 0 = f(1,1)$$

Άρα το (1,1) είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

6. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(-1,2,3)$ και κατεύθυνση $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, όπου:

$$f: \Re^3 \rightarrow \Re, \text{με } f(x,y,z) = xz - y^2$$

Λύση

$$D_{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)} f(-1,2,3)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left((-1,2,3) + h\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) - f(-1,2,3)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left((-1,2,3) + \left(\frac{h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{2h}{3}\right)\right) + 7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\left(-1 + \frac{h}{3}, 2 + \frac{2h}{3}, 3 + \frac{2h}{3}\right)\right) + 7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\left(-1+\frac{h}{3}, 2+\frac{2h}{3}, 3+\frac{2h}{3}\right)\right)+7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(-1+\frac{h}{3}\right)\left(3+\frac{2h}{3}\right)-\left(2+\frac{2h}{3}\right)^2+7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3-\frac{2h}{3}+\frac{3h}{3}+\frac{2h^2}{9}-\left(4+\frac{8h}{3}+\frac{4h^2}{9}\right)+7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{7h}{3}-\frac{2h^2}{9}}{h} = -\frac{7}{3}$$

<u>Σχόλιο</u>: Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν χρησιμοποιούσαμε το θεώρημα, το οποίο αναφέρει ότι $D_{\vec{\alpha}}f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{\alpha}, \forall f: A \subseteq \Re^n \to \Re$, διαφορίσιμη, $\forall\ \vec{x} \in A$ και $\forall \vec{\alpha} \in \Re^n: \|\vec{\alpha}\| = 1$, αφού η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.

7. Να εξετάσετε αν έχει μερικές παραγώγους στο σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,0)+h(1,0)\big)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}$$

Όμως, αν $h > 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$ και αν $h < 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty$

Επομένως, $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,0)+h(0,1)\big) - f(0,0)}{h} = 0$$

8. Να επαληθεύσετε τον τύπο του Green για τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y) = (2x - y, x + 3y)$ στο $G = \left\{(x,y) \in \Re^2 \middle| \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\right\}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το G είναι ένα απλό σύνολο Green και η $\vec{F}$ είναι C^1 στο G. Επομένως εφαρμόζεται ο τύπος του Green, για $P = 2x - y$ και $Q = \ x + 3y$:

$$\oint_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\partial G = \Gamma = \{\vec{r}: \vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t), t \in [0,2\pi]\}$$

$$I = \int_0^{2\pi} (4\cos t - \sin t, 2\cos t + 3\sin t) \cdot (-2\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8\sin t\cos t + 2(\sin t)^2 + 2(\cos t)^2 + 3\sin t\cos t) dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{5}{2}\sin 2t + 2\right) dt = \left[\frac{5}{4}\cos 2t + 2t\right]_{0}^{2\pi} = 4\pi$$

Για το διπλό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_G \big(1 - (-1)\big)\, dx\, dy = 2 \iint_G dx\, dy$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό $\vec{T}(r,\theta) = (2r\cos\theta\,, r\sin\theta\ )$ προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

και

$$det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = det\mathfrak{I}\vec{T}(r,\theta) = det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$$

Οπότε:

$$I' = 2\iint_G dx\, dy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 2r\, dr\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

Επομένως ισχύει ο τύπος του Green, αφού $I = I'$.

9. Να βρεθεί σημείο του επιπέδου $x - 2y + z = 5$, το οποίο να είναι πλησιέστερο στο σημείο $(5, -3, 6)$.

Λύση

Έστω το ζητούμενο σημείο είναι το (x, y, z), το οποίο απέχει απόσταση από το $(5, -3, 6)$ ίση με:

$$d = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2}$$
$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2 + (2y - x - 1)^2}$$

Θα μελετήσουμε την $d = d(x, y)$ ως προς τα ακρότατα.

Τότε η d γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν η d^2 γίνεται ελάχιστη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= (x-5)^2 + (y+3)^2 + (2y - x - 1)^2 \\ &= 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 8x + 2y + 35 \end{aligned}$$

Η d^2 είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial d^2}{\partial x}(x, y) = 4x - 4y - 8$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial y}(x, y) = 10y - 4x + 2$$

Οπότε:

$$\nabla d^2(x, y) = (4x - 4y - 8, 10y - 4x + 2)$$

Λύνουμε:

$$\nabla d^2(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y - 8 = 0 \\ 10y - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \quad (\mathbf{1}) \\ 10y - 4x + 2 = 0 \; (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Από αντικατάσταση της $(\mathbf{1})$ στη $(\mathbf{2})$ προκύπτει:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 10y - 4y - 8 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα θα εξετάσουμε το σημείο $(3, 1)$.

Βρίσκομε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}(x, y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial y^2}(x, y) = 10$$

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial y \partial x}(x,y) = -4 = \frac{\partial^2 d^2}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Έχουμε:

$$Hd^2(3,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}(3,1) & \frac{\partial^2 d^2}{\partial x \partial y}(3,1) \\ \frac{\partial^2 d^2}{\partial y \partial x}(3,1) & \frac{\partial^2 d^2}{\partial y^2}(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}(3,1) = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = detHd^2(3,1) = 24 > 0$$

Τελικά, το (3,1) είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

Οπότε, το ζητούμενο σημείο είναι το $(3, 1, 4)$, το οποίο απέχει απόσταση από το $(5, -3, 6)$, $d = 2\sqrt{6}$.

Κυριακή 16 Δεκεμβρίου 2018,

ΦΡΑΓΚΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ