

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

### 1ο φυλλάδιο ασκήσεων

**Άσκηση 1:** Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(iii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (iv) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(v) f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad (vi) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt[3]{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Άσκηση 2:** Υπολογίστε στο σημείο  $(0, 1)$  την παράγωγο (πίνακα *Jacobi*) της συνάρτησης  $f(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$ .

**Άσκηση 3:** Υπολογίστε την  $f_{xx}$  και την  $f_{yy}$  των συναρτήσεων  
(i)  $f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x$  , (ii)  $f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2)$ .

**Άσκηση 4:** a) Υπολογίστε την  $f_{zx}$  των συναρτήσεων  
(i)  $f(x, y, z) = \sin(xy) \cos(z^2)$  , (ii)  $f(x, y, z) = x^{y+z}$

b) Υπολογίστε την  $f_{yx}$  και την  $f_{zz}$  των συναρτήσεων  
(i)  $f(x, y, z) = z^2 \arctan(xy)$  , (ii)  $f(x, y, z) = ze^{x+y+z}$ .

**Άσκηση 5:** Εξετάστε αν είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$  η συνάρτηση:

$$\vec{f}(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Άσκηση 6:** Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$  κατά την κατεύθυνση  $\vec{a} = (1, 2, -1)$  στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**Άσκηση 7:** Βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου  $f_{\vec{a}}(1, 2, 0)$  της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^2z + ye^z + xz^3$  και την κατεύθυνση κατά την οποία λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

**Άσκηση 8:** Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} (i) f(x, y) &= x^3 - 6x^2 + y^2, & (ii) f(x, y) &= x^2 + y^2 + x^2y + 4 \\ (iii) f(x, y) &= x^2 - x^4 - y^4, & (iv) f(x, y) &= x^2 - y^2 \\ (v) f(x, y) &= x^3 - 9x^2 + y^2 \end{aligned}$$

**Άσκηση 9:** a) Υπολογίστε τη λαπλασιανή της συνάρτησης  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3)$ .  
b) Εξετάστε αν είναι συντηρητικό το πεδίο  $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y)$ .