

Ανάλυση ΙΙ - Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Εξέταση Φεβρουαρίου 2021 (11-2-2021)
2ο Μέρος - Ομάδα Β

Οδηγίες: Σε κάποια από τα θέματα που ακολουθούν εμφανίζονται οι παράμετροι a, b, c . Οι παράμετροι αυτές αντιστοιχούν με αυτή τη σειρά στα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Για να λύσετε το κάθε θέμα θα πρέπει να ξεκινήσετε αντικαθιστώντας σωστά τις τιμές αυτών των παραμέτρων. Για παράδειγμα, αν ο αριθμός μητρώου σας ήταν sdi1800039, τότε θα έπρεπε να θέσετε $a = 0, b = 3, c = 9$.

Θέμα 4ο.

Έστω $\lambda = c + 2$ (όπου c είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας).

A. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\lambda(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2}$$

B. Εξετάστε για ποιες τιμές του $\rho > 0$ υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\rho y}{\sin(x^2 + y^2)}$$

Θέμα 5ο.

Έστω $\lambda = b + 1, \mu = c + 1$, όπου b και c τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας.

A. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln \sqrt{\lambda x^2 + \mu y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της και υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης της $\nabla f(x, y)$.

B. Αν η $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\sigma(0) = (b, 5)$ και $\sigma(1) = (c, 7)$ (όπου b και c τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας) είναι μια C^1 καμπύλη η οποία δεν διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\sigma} \frac{\lambda x dx + \mu y dy}{\lambda x^2 + \mu y^2}.$$

Θέμα 6ο.

Έστω $k = 2a + 3$, όπου a το τρίτο από το τέλος ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

A. Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2^k} \int_{\sqrt[k]{x}}^2 \frac{1}{y^{k+1} + 1} dy dx.$$

B. Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες, υπολογίστε τον όγκο του κώνου με εξίσωση

$$z = k - \sqrt{x^2 + y^2}$$

και βάση στο xy επίπεδο.