

Ανάλυση II

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

7η Σειρά Ασκήσεων

Τοπικά ακρότατα συναρτήσεων - Πολλαπλασιαστές Lagrange

1. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

3. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x, y) = e^{xy}, \quad (\beta) f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2xy, \quad (\gamma) f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$$

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ έχει ένα κρίσιμο σημείο το οποίο δεν είναι τοπικό ακρότατο. Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

(α) Δείξτε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0, 0)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f , αλλά όχι τοπικό ελάχιστο αυτής.

6. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό τη συνθήκη $xy = 1$.

7. Έστω $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$.

Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της f στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ είναι $\frac{R^6}{27}$.

8. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ υπό τις συνθήκες $x^2 + y^2 = 2$ και $x + z = 1$.

9. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$ υπό τις συνθήκες $x^2 + y^2 = 3$ και $y = 2z$.

10. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy + xz$ υπό τις συνθήκες $2x + 3z = 5$ και $xy = 4$.