11η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

α) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης γύρω από το $(0,0)$ της $f(x,y) = \sin x \cos y$

β) Δείξτε ότι $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x\cos y - 1 - x - \frac{1}{2}(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0$

Λύση

α) Έχουμε $f(x,y) = \sin x \cos y \Rightarrow f(0,0) = 0$. Παραγωγίζοντας:

$f_x = \cos x \cos y \Rightarrow f_x(0,0) = 1$

$f_y = -\sin x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

$f_{xx} = -\sin x \cos y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{xy} = -\cos x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$

$f_{yy} = -\sin x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 0$

Επομένως το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης γύρω από το $(0,0)$ της f είναι το $P_2(x,y) = f(0,0) + [f_x(0,0)x + f_y(0,0)y] +$

$+ \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_2(x,y) = x$

Οπότε $f(x,y) = x + R_2((x,y),(0,0))$, όπου $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2((x,y),(0,0))}{x^2+y^2} = 0$

β) Έστω $g(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow g(0,0) = 1$

$g_x(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow g_x(0,0) = 1$

$g_y(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow g_y(0,0) = 0$

$g_{xx}(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow g_{xx}(0,0) = 1$

$g_{xy}(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow g_{xy}(0,0) = 0$

$g_{yy}(x,y) = -e^x \cos y \Rightarrow g_{yy}(0,0) = -1$

Οπότε το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης της g γύρω από το $(0,0)$ είναι το $P_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

Οπότε $g(x,y) = P_2(x,y) + R_2((x,y),(0,0))$, όπου $\displaystyle \frac{R_2((x,y),(0,0))}{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Άρα $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x\cos y - 1 - x - \frac{1}{2}(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - P_2(x,y)}{x^2+y^2}$

$\displaystyle = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2((x,y),(0,0))}{x^2+y^2} = 0$

Άσκηση 2

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων και ταξινομήστε τα ως τοπικά ακρότατα ή σαγματικά σημεία

Λύση

α) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

Έχουμε $f_x = 2x + y$, $f_y = 2y + x$

Το (x,y) είναι κρίσιμο σημείο $\Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -4x + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0)$

Έχουμε $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$

Οπότε $\Delta = f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 4 - 1 = 3 > 0$

Επίσης $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$. Επομένως το $(0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο

β) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$

Το (x,y) είναι τοπικό ακρότατο $\Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ 3y^2 - 36y + 81 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y^2 - 12y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = -2 \\ y = 3 \text{ ή } y = 9 \end{cases}$$

Οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,3)$, $(0,9)$, $(-2,3)$, $(-2,9)$

Έχουμε τώρα $f_{xx} = 6x + 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y - 36$

i) Για το $(0,3)$: $f_{xx}(0,3) = 6$, $f_{xy}(0,3) = 0$, $f_{yy}(0,3) = -18$

Οπότε $\Delta = 6(-18) - 0^2 = -108 < 0$. Οπότε έχουμε σαγματικό σημείο

ii) Για το $(0,2)$: $f_{xx}(0,2)=60$, $f_{xy}(0,2)=0$, $f_{yy}(0,2)=18$
Οπότε $\Delta = 60\cdot 18 - 0^2 = 1080 > 0$ και $f_{xx}(0,2) = 60 > 0$
Οπότε έχουμε τοπικό ελάχιστο

iii) Για το $(-2,3)$: $f_{xx}(-2,3)=-6$, $f_{yy}(-2,3)=-18$, $f_{xy}(-2,3)=0$
Οπότε $\Delta=(-6)(-18)-0^2=108>0$ και $f_{xx}(-2,3)=-6<0$
Οπότε έχουμε τοπικό μέγιστο

iv) Για το $(-2,2)$: $f_{xx}(-2,2)=-6$, $f_{xy}(-2,2)=0$, $f_{yy}(-2,2)=18$
Οπότε $\Delta=(-6)\cdot 18-0^2=-108<0$
Άρα έχουμε σαγματικό σημείο

Άσκηση 3

α) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z)=x-y+z$ επί της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=100$

β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ υπό τη συνθήκη $x-2y+3z=4$

Λύση

α) Έστω $K=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=100\}$. Θα δείξουμε ότι είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, δηλαδή συμπαγές.

• Το K είναι κλειστό: Αν $((x_n,y_n,z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο K με $(x_n,y_n,z_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x,y,z)$, τότε $x^2+y^2+z^2 =$
$= \lim_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2+z_n^2) = \lim_{n\to\infty} 100 = 100$. Άρα $(x,y,z)\in K$

• Το K είναι φραγμένο: Αν $(x,y,z)\in K$, τότε $\|(x,y,z)\| =$
$= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{100} = 10 \leq 10$.

Τώρα η f είναι συνεχής. Συνεπώς περιορισμένη στο συμπαγές K θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή

Θα χρησιμοποιήσουμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange
Δουλεύουμε στην επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=100$
Έστω $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \nabla g(x,y,z)=(2x,2y,2z)$
Παρατηρούμε ότι $\nabla g(x,y,z)\neq(0,0,0)$ $\forall (x,y,z)\in K$, διότι
$\nabla g(x,y,z)=(0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)\notin K$
Τώρα αν $(x,y,z)\in K$, στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, αφού $\nabla g(x,y,z)$ γρ. ανεξάρτητο (δηλαδή $\nabla g(x,y,z)\neq 0$), θα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$
$\Leftrightarrow (1,-1,1)=(2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2\lambda} \\ y=-\frac{1}{2\lambda} \\ z=\frac{1}{2\lambda} \end{cases}$

Όμως $x^2+y^2+z^2=100 \Leftrightarrow \frac{3}{4\lambda^2}=100 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{3}{400} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{20}$

Οπότε $(x,y,z) = \left(\frac{70}{\sqrt{3}}, \frac{-70}{\sqrt{3}}, \frac{70}{\sqrt{3}}\right)$ ή $(x,y,z) = \left(\frac{-70}{\sqrt{3}}, \frac{70}{\sqrt{3}}, \frac{-70}{\sqrt{3}}\right)$

Υποχρεωτικά στο ένα θα έχουμε μέγιστο και στο άλλο ελάχιστο

$f\left(\frac{70}{\sqrt{3}}, \frac{-70}{\sqrt{3}}, \frac{70}{\sqrt{3}}\right) = 70\sqrt{3}$, $f\left(\frac{-70}{\sqrt{3}}, \frac{70}{\sqrt{3}}, \frac{-70}{\sqrt{3}}\right) = -70\sqrt{3}$

Οπότε $\max_K f = 70\sqrt{3}$, $\min_K f = -70\sqrt{3}$

β) [Το $K = \{(x,y,z) \mid x-2y+3z=4\}$ δεν είναι συμπαγές διότι δεν είναι φραγμένο, π.χ. $\left(n, \frac{n-4}{2}, 0\right) \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\left\|\left(n, \frac{n-4}{2}, 0\right)\right\| \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$. Επομένως δεν γνωρίζουμε εξ' αρχής την ύπαρξη ελαχίστου ή μεγίστου στο K]

Έστω $g(x,y,z) = x-2y+3z$. Δουλεύουμε στην επιφάνεια $g(x,y,z) = 4$.

Αν λοιπόν $(x,y,z) \in K$ ~~να~~ ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό, τότε αφού $\nabla g(x,y,z) = (1,-2,3) \neq 0$, δηλαδή είναι γρ. ανεξάρτητο, ~~τ~~ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \Leftrightarrow (2x, 2y, 2z) = (\lambda, -2\lambda, 3\lambda) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = -\lambda \\ z = \frac{3\lambda}{2} \end{cases}$$

Όμως $x-2y+3z=4 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{9\lambda}{2} = 4 \Leftrightarrow 7\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{7}$

Οπότε $(x,y,z) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$

Τώρα $f\left(\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{6}{7}\right) = \frac{56}{49} = \frac{8}{7}$

Όμως δεν γνωρίζουμε ότι αυτό είναι πράγματι ελάχιστο της f πάνω στο K και δεν είναι απλό να το δείξουμε.

Έχουμε ότι $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|^2$, δηλαδή η άσκηση μας ζητάει να βρούμε την (ελάχιστη) απόσταση του επιπέδου $x-2y+3z=4$ από το $(0,0,0)$

Αυτή θα επιτυγχάνεται στο σημείο που τέμνει το επίπεδο $\pi: x-2y+3z=4$ η ευθεία που διέρχεται από το $(0,0,0)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο, έστω $\ell(t)$

Αφού $\ell(t) \perp \pi$, τότε $\ell(t) \parallel (1,-2,3)$ και αφού διέρχεται από το $(0,0,0)$, τότε $\ell(t) = t(1,-2,3)+(0,0,0)$
$\Leftrightarrow \ell(t) = (t,-2t,3t)$

Η $\ell(t)$ τέμνει το επίπεδο $\pi \Leftrightarrow t-2(-2t)+3\cdot 3t = 4$
$\Leftrightarrow 14t = 4 \Leftrightarrow t = \frac{2}{7}$, δηλαδή στο $\left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$
και είναι το σημείο που βρήκαμε πριν

Άρα $\min\limits_K f = \frac{56}{49} = \frac{8}{7}$

<u>Σημείωση</u>: Αν είχαμε σκεφτεί εξ' αρχής αυτό το επιχείρημα, δε χρειαζόταν να δουλέψουμε με πολ/στές Lagrange. Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο που δίνει απόσταση σημείου από επίπεδο

$$d = \frac{|1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

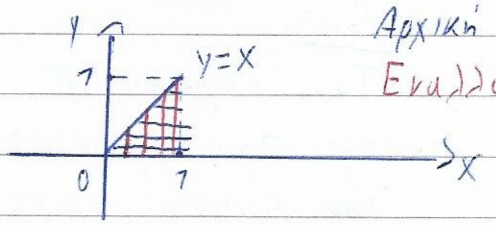
Οπότε $\min\limits_K f = d^2 = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

Άσκηση 4

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

Λύση

α) $I_1 = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} x^2 e^{xy}\, dx\, dy$



Αρχική μορφή
Εναλλαγή

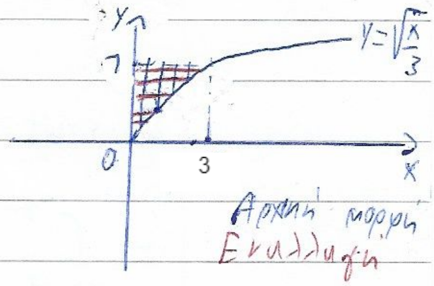
Με ανισότητες: $0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Οπότε $I_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x^2 e^{xy}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} x \int_{y=0}^{x} x e^{xy}\, dy\, dx$

$= \int_{x=0}^{1} x \left[e^{xy} \right]_0^x dx = \int_{x=0}^{1} x (e^{x^2} - 1)\, dx =$

$= \int_{x=0}^{1} x e^{x^2} - x\, dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$

β) $I_2 = \int_{x=0}^{3} \int_{y=\sqrt{\frac{x}{3}}}^{1} e^{y}\, dy\, dx$



Αρχική μορφή
Εναλλαγή

Έχουμε ότι $0 \leq x \leq 3,\ \sqrt{\frac{x}{3}} \leq y \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq 1$ και $0 \leq x \leq 3y^2$

Οπότε $I_2 = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{3y^2} e^{y^3}\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} 3y^2 e^{y^3}\, dy = \left[e^{y^3} \right]_0^1 =$
$= e - 1$

Άσκηση 5

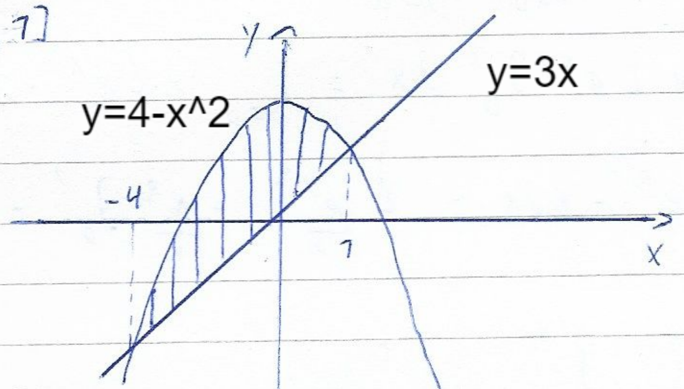
Υπολογίστε τους παρακάτω όγκους:

Λύση

α) Του στερεού K που έχει βάση το χωρίο του επιπέδου xy που φράσσεται από την παραβολή $y=4-x^2$ και την ευθεία $y=3x$ και φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z=x+4$

Έχουμε ότι $4-x^2 \geq 3x \iff x^2+3x-4 \leq 0 \iff (x+4)(x-1) \leq 0$

$\iff x \in [-4, 1]$



Συνεπώς $V_1 = \int_{x=-4}^{1} \int_{y=3x}^{4-x^2} \int_{z=0}^{x+4} dz\, dy\, dx =$

$= \int_{x=-4}^{1} \int_{y=3x}^{4-x^2} x+4 \, dy\, dx = \int_{x=-4}^{1} (4-x^2-3x)(x+4)\, dx =$

$= \int_{x=-4}^{1} -x^3-7x^2-8x+16 \, dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_{-4}^{1} =$

$= \frac{625}{12}$

β) Του στερεού L που βρίσκεται στο 1ο ογδοημόριο και φράσσεται από τα επίπεδο συντεταγμένων, από το επίπεδο $x=3$ και από τον παραβολικό κύλινδρο $z=4-y^2$

Παρατηρούμε ότι είμαστε στο 1ο ογδοημόριο. Επομένως δουλεύουμε για $x,y,z\geq 0$

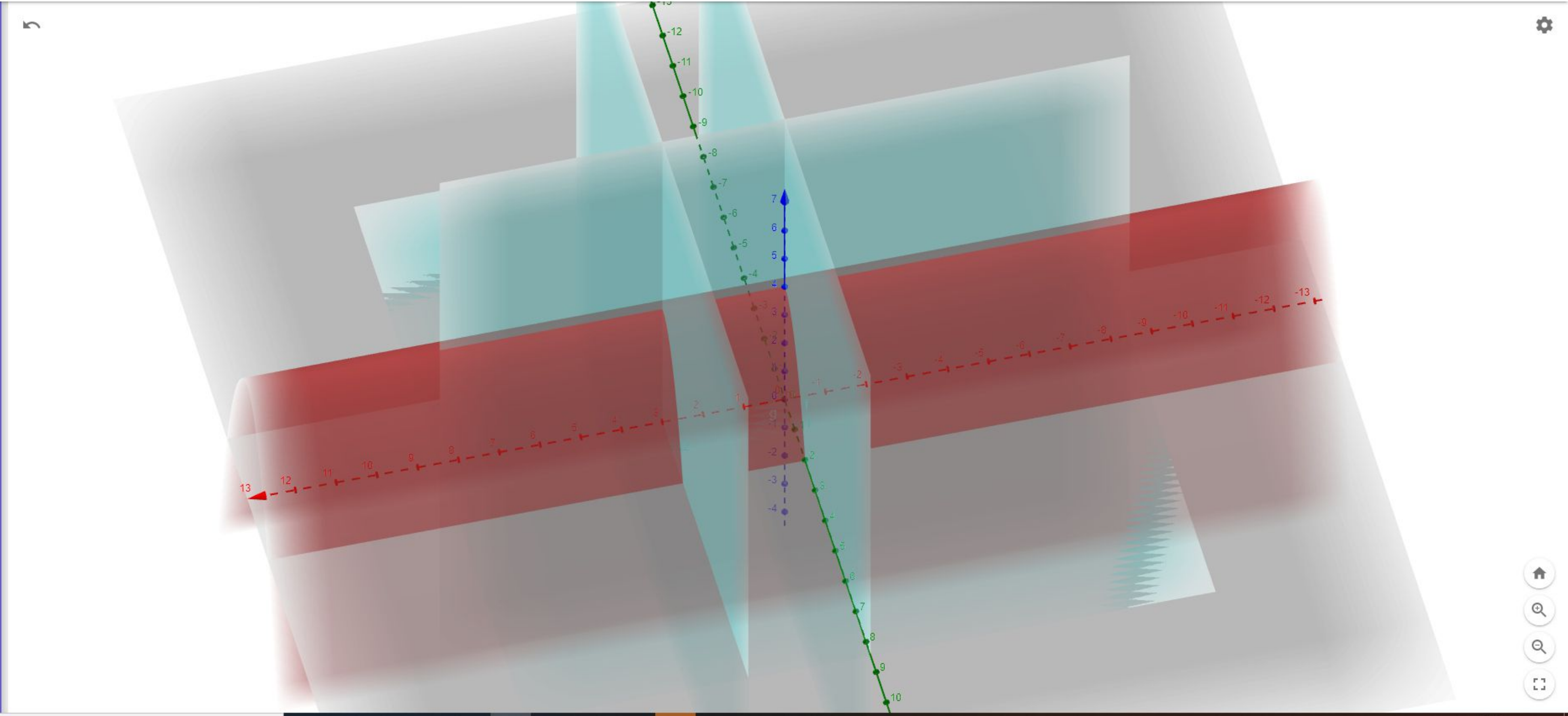
Επίσης $0\leq z\leq 4-y^2$. Οπότε πρέπει $4-y^2\geq 0 \Leftrightarrow y\in[-2,2]$

$\overset{y\geq 0}{\Rightarrow} y\in[0,2]$

Συνεπώς $V_2 = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{4-y^2} dz\,dy\,dx =$

$= \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2} 4-y^2\,dy\,dx = 3\int_{y=0}^{2} 4-y^2\,dy = 3\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 =$

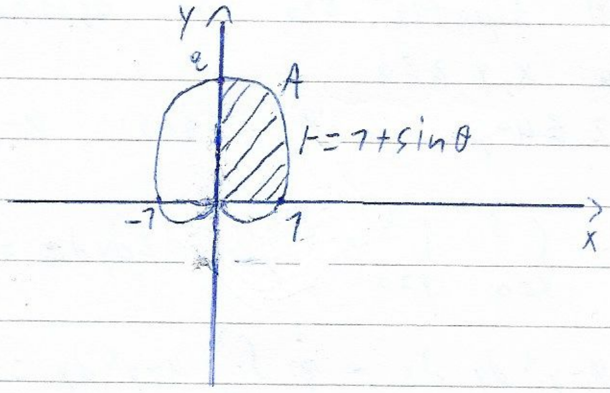
$= 3\left(8-\frac{8}{3}\right) = 16$



Άσκηση 6

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτει από το $1^{ο}$ τεταρτημόριο η καρδιοειδής καμπύλη $r=1+\sin\theta$

Λύση



Έχουμε ότι $E = \iint_A dx\,dy \overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{συντεταγμ}}{=}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta$

$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\sin\theta} d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin\theta)^2}{2}\, d\theta =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+2\sin\theta+\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+2\sin\theta+\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3\theta}{2} - 2\cos\theta - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}+2\right) = \frac{3\pi}{8}+1$

Άσκηση 1

Βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, όπου

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le e\}$

Λύση

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και έχουμε ότι

$D^* = \{(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi) \mid 1\le r^2\le e\} = [1,\sqrt{e}]\times[0,2\pi)$

Οπότε $I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{e}} \frac{\ln(r^2)}{r}\, r\,dr\,d\theta =$

$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{e}} \ln(r^2)\,dr\,d\theta = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} 2\ln r\,dr =$

$= 4\pi\int_1^{\sqrt{e}} \ln r\,dr = 4\pi\int_1^{\sqrt{e}} (r)'\ln r\,dr =$

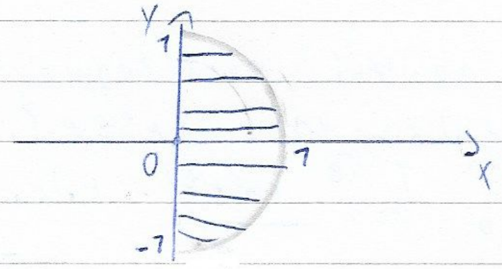
$= 4\pi\left([r\ln r]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} r(\ln r)'\,dr\right) = 4\pi\left(\sqrt{e}\ln\sqrt{e} - \int_1^{\sqrt{e}} dr\right) =$

$= 4\pi\left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} + 1\right) = 4\pi\left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

Άσκηση 8

Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογίστε το $I = \int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{z=0}^{x} x^2+y^2 \, dz\,dx\,dy$

Λύση



Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες

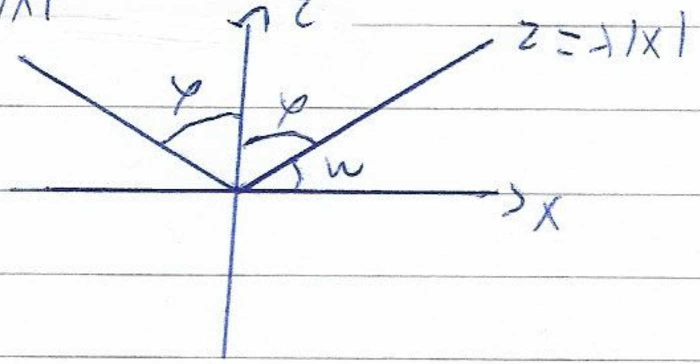
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0,1], \quad z \in [0, r\cos\theta]$$

Οπότε $I = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{r\cos\theta} r^2 \, r \, dz\,dr\,d\theta =$

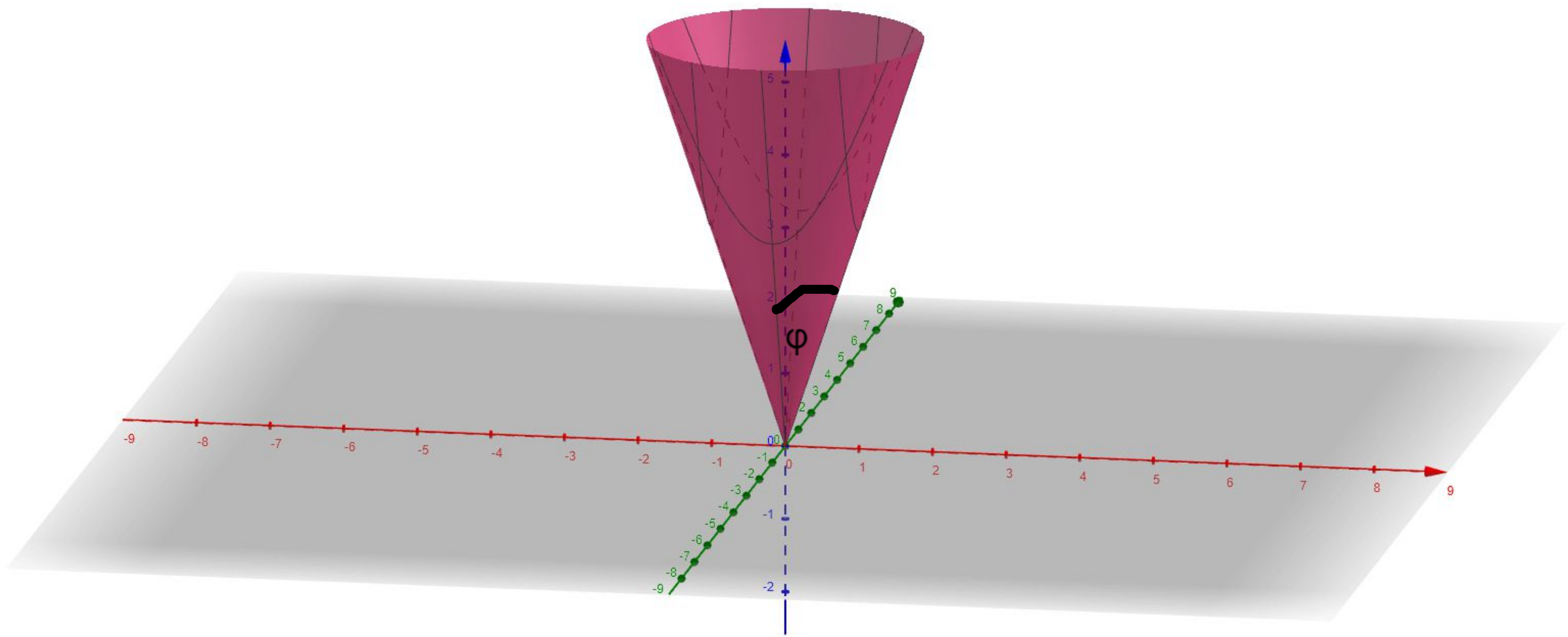
$$= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r^3 \int_{z=0}^{r\cos\theta} dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r^4 \cos\theta \, dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \int_{r=0}^{1} r^4 \, dr = [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Παρατήρηση: Αν έχουμε έναν κώνο της μορφής $z = \lambda \sqrt{x^2+y^2}$, όπου $\lambda > 0$, τότε η γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα Oz μπορεί να βρεθεί ως εξής: Προβάλλουμε στο xz επίπεδο (το $y=0$ δηλαδή) τον κώνο και η εξίσωσή του γίνεται $z = \lambda |x|$



Γνωρίζουμε όμως ότι $\tan(\omega) = \lambda \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \lambda$


φ

Άσκηση 9

Βρείτε τον όγκο του στερεού που είναι φραγμένο από κάτω από το επίπεδο xy, στο πλάι από τη σφαίρα $\rho=2$ και από πάνω από τον κώνο $\varphi=\frac{\pi}{3}$

Λύση

Η σφαίρα $\rho=2$ είναι η $x^2+y^2+z^2=4$

Ο κώνος $\varphi=\frac{\pi}{3}$ είναι ο $z^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$. Μάλιστα, αφού $z\geq 0$, μας ενδιαφέρει το τμήμα του κώνου με εξίσωση $z=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$V=\iiint dx\,dy\,dz=\int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_{\rho=0}^{2}\rho^2\,d\rho=[\theta]_0^{2\pi}\,[-\cos\varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\,\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

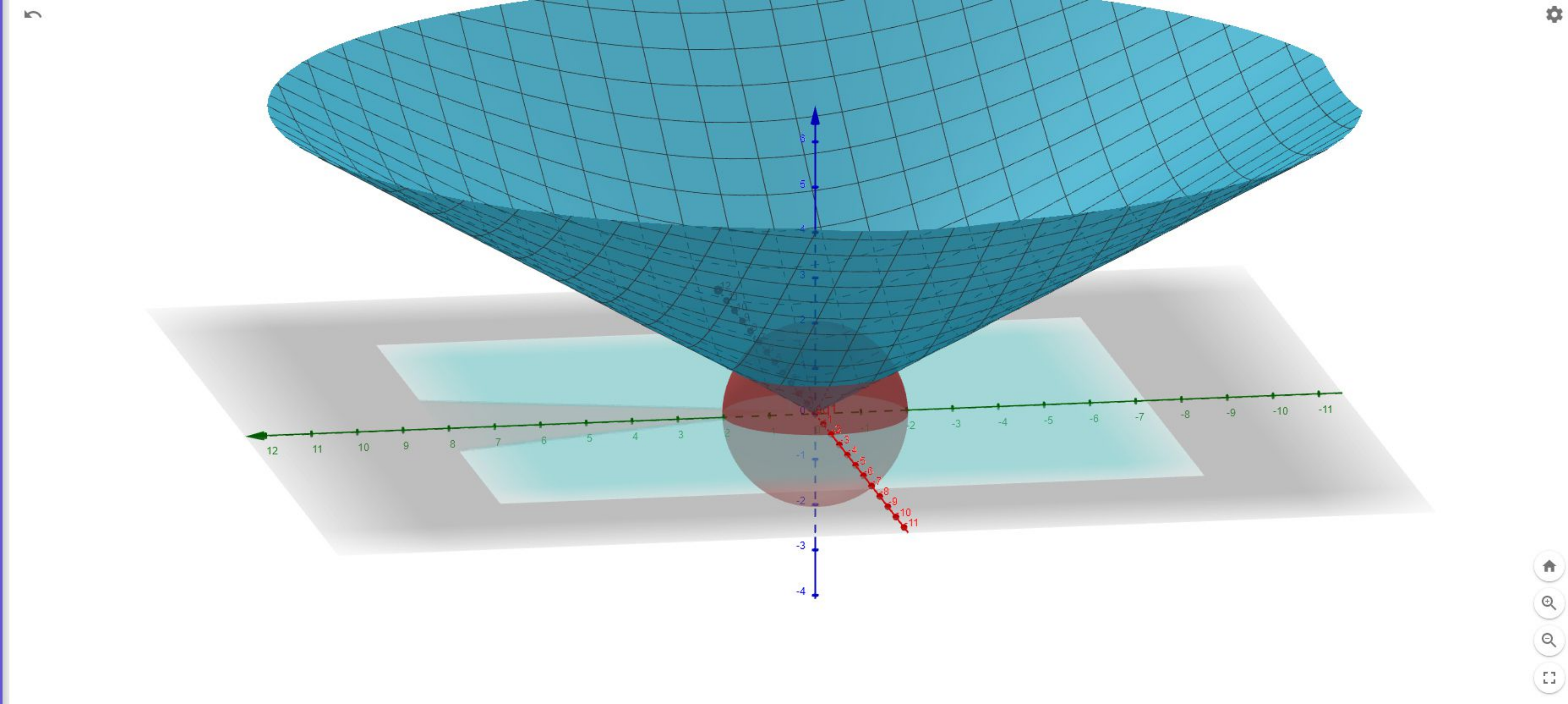
[Το φ κινείται από $\frac{\pi}{3}$ (γωνία που σχηματίζει ο κώνος με Oz) μέχρι $\frac{\pi}{2}$ (το επίπεδο $z=0$ δηλαδή)]

Παρατήρηση

Αν χρησιμοποιούσαμε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπως στο μάθημα ασκήσεων θα είχαμε ότι $\theta\in[0,2\pi]$, $r\in[0,2]$ και $z\in[0,\min\{\frac{\sqrt{3}}{3}r,\sqrt{4-r^2}\}]$

Αυτό συμβαίνει γιατί καθώς παίρνουμε όλα τα σημεία της "βάσης" του σχήματος (δηλαδή του κύκλου $x^2+y^2=4$, $z=0$), το z (ύψος), τρέχει από το 0 μέχρι να συναντήσει πρώτα είτε τον κώνο, είτε τη σφαίρα (καθώς πρέπει να είμαστε κάτω από τον κώνο και εντός της σφαίρας)

Οπότε πρέπει $z\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}r$ (κάτω από τον κώνο) και $z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-r^2}$ (μέσα στη σφαίρα). Επομένως πρέπει $z\leq\min\{\frac{\sqrt{3}}{3}r,\sqrt{4-r^2}\}$



12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
6
5
4
3
2
0
-1
-2
-3
-4

Άσκηση 10

Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τους δύο κυλίνδους $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$ και τους κώνους $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=-\sqrt{x^2+y^2}$

Λύση

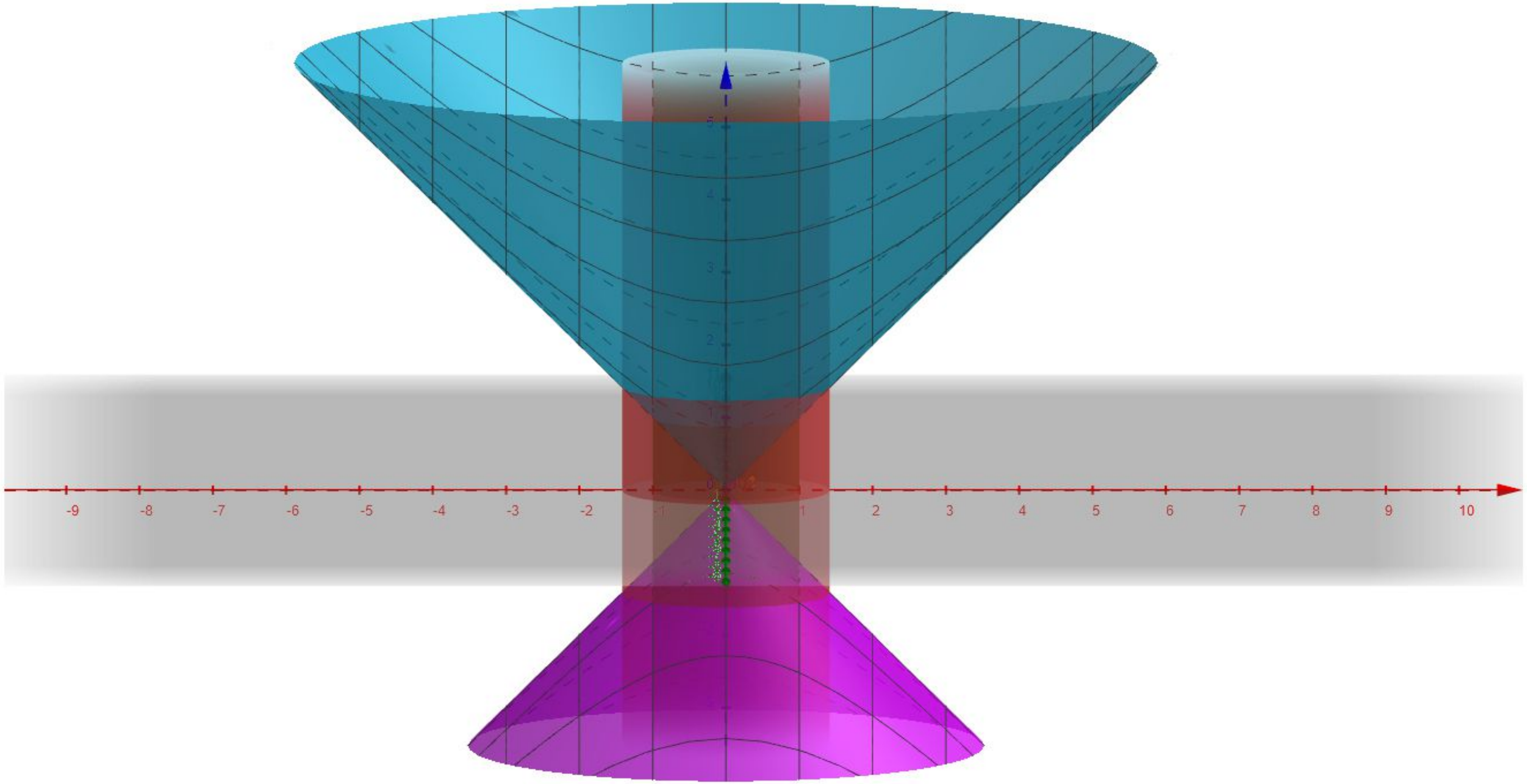
Έχουμε ότι $V=\iint_{1\le x^2+y^2\le 2}\int_{z=-\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dx\,dy$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$

Οπότε $V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{2}}\int_{z=-r}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta =$

$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{2}} 2r^2\,dr\,d\theta = 2\pi\int_{r=1}^{\sqrt{2}} 2r^2\,dr = 2\pi\left[\frac{2r^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} =$

$=\frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$


-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
2
3
4
5
6
7
8
9
10