# Λύσεις 4ης Σειράς Ασκήσεων

1. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο καθεμιάς από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που υποδεικνύεται:

(a) $3xy + z^2 = 4$ στο $(1,1,1)$

Η δεδομένη επιφάνεια $S$ είναι μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $f(x,y,z) = 3xy + z^2$ (η $L_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 4\}$).
Η $f$ είναι διαφορίσιμη ως πολυωνυμική, οπότε το ζητούμενο εφαπτόμενο επίπεδο θα είναι το επίπεδο που έχει ως κάθετο διάνυσμα το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(1,1,1)$, δηλαδή θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} \cdot (x-1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} \cdot (y-1) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} \cdot (z-1) = 0$$

Άρα, αν $P$ είναι αυτό το επίπεδο, τότε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = 3y|_{(1,1,1)} = 3, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = 3x|_{(1,1,1)} = 3, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = 2z|_{(1,1,1)} = 2$$

οπότε

$$P: \quad 3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0$$

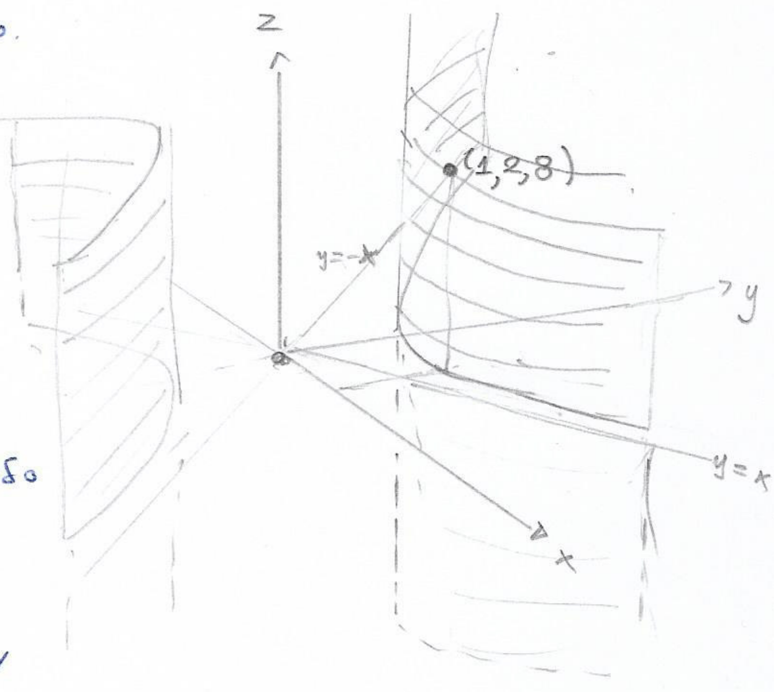
ή

$$P: \quad 3x + 3y + 2z = 8$$

1 (β) $y^2-x^2=3$ στο $(1,2,8)$

Έχουμε μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $f(x,y,z)=y^2-x^2$.

Αφού οι τιμές της συνάρτησης είναι ανεξάρτητες του $z$, η επιφάνεια είναι «κυλινδρική», δηλαδή παράγεται από την καμπύλη $y^2=3+x^2$ στο $xy$-επίπεδο καθώς ($y=\pm\sqrt{x^2+3}$) αυτή μετατοπίζεται παράλληλα στον άξονα $z'z$ (κατακόρυφα). Έτσι και το εφαπτόμενο επίπεδο θα είναι κατακόρυφο.




Είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

Η $f$ είναι διαφορίσιμη ως πολυωνυμική (αλλιώς: είναι της κλάσης $C^1$) και το εφαπτόμενο επίπεδο της δεδομένης επιφάνειας στάθμης στο σημείο της $(1,2,8)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,8)}\cdot(x-1)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,8)}\cdot(y-2)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,8)}\cdot(z-8)=0\,,$$

δηλαδή

$$-2(x-1)+4\cdot(y-2)=0$$

ή

$$-2x+4y=6 \quad \text{ή} \quad -x+2y=3$$

1 (γ)

$$xyz = 1 \quad \text{στο} \quad (1,1,1)$$

Η επιφάνεια είναι επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $f(x,y,z) = xyz$, η οποία είναι διαφορίσιμη ως πολυωνυμική με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1,1,1)$ έχει εξίσωση

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} \cdot (x-1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} \cdot (y-1) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} \cdot (z-1) = 0$$

δηλαδή

$$(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

ή $\quad x + y + z = 3$

(δ) $\quad z = (\cos x)\cdot(\sin y) \quad$ στο $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$

Είναι η επιφάνεια στάθμης $f(x,y,z) = 0$ της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = (\cos x)\cdot(\sin y) - z.$$

Είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \cos y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$

Η $f$ είναι διαφορίσιμη, αφού είναι της κλάσης $C^1$ και το εφαπτόμενο επίπεδο της δεδομένης επιφάνειας στάθμης στο σημείο $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$ έχει εξίσωση:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\frac{\pi}{2},1)} (x-0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\frac{\pi}{2},1)} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-1) = 0,$$

δηλαδή

$$-(z-1) = 0 \quad \text{ή} \quad z = 1$$

(οριζόντιο επίπεδο)

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια αυτή είναι το γράφημα της συνάρτησης $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$g(x,y) = \cos x \cdot \sin y \quad ,$$

οπότε το εφαπτόμενο επίπεδο θα μπορούσε να βρεθεί και με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου - δείτε και την Άσκηση 3 για τη σύγκριση των δύο μεθόδων.

2. Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε καθεμιά από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που δίνεται:

(α) $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ στο $(0,0,2)$

Η δεδομένη επιφάνεια είναι επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^3y^3 + y - z$$

η οποία είναι διαφορίσιμη ως πολυωνυμική. Ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f$ στο δεδομένο σημείο:

$$\nabla f(0,0,2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,2), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,2), \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,2) \right)$$

$$= \left( 3x^2y^3\big|_{(0,0,2)}, 3x^3y^2+1\big|_{(0,0,2)}, -1 \right)$$

$$= (0, 1, -1)$$

Για να βρούμε μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα διαιρούμε το $\nabla f(0,0,2)$ με $\|\nabla f(0,0,2)\| = \sqrt{2}$. Άρα το $\vec{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο $(0,0,2)$.

2 (β). $\cos(xy) = e^z - 2$ στο $(1, \pi, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y,z) = \cos(xy) - e^z$.
Η δεδομένη επιφάνεια είναι επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $f$.
Οι μερικές παράγωγοι της $f$ είναι
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\sin(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -e^z,$$
οι οποίες είναι συνεχείς, άρα η $f$ είναι διαφορίσιμη. Έπεται ότι ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια στο σημείο $(1,\pi,0)$ είναι η κλίση $\nabla f(1,\pi,0) = (0,0,-1)$.
Το διάνυσμα αυτό είναι και μοναδιαίο.

3. Θυμηθείτε τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ του γραφήματος της συνάρτησης $z = f(x,y)$ και αποδείξτε ότι αυτός μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού αν δούμε το γράφημα σαν μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης
$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

Απάντηση

Παρατηρούμε πρώτα ότι αν η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(x_0,y_0)$, τότε και η $F$ είναι διαφορίσιμη στο $F(x_0,y_0,z)$, για οποιοδήποτε $z \in \mathbb{R}$, ως άθροισμα διαφορίσιμων συναρτήσεων – της $f(x,y,z) = f(x,y)$ και της $g(x,y,z) = -z$.
Θέτουμε $z_0 = f(x_0,y_0)$ και παρατηρούμε ότι:
$$(*) \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = -1$$

Αν τώρα θεωρήσουμε την επιφάνεια

$$z = f(x,y)$$

ως την επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $F$ που αντιστοιχεί στην τιμή $0$ : $L_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδό της στο σημείο $(x_0, y_0, z_0)$ δίνεται από την εξίσωση

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot (y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot (z-z_0) = 0$$

Αντικαθιστώντας από την $(*)$, παίρνουμε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

δηλαδή, αφού $z_0 = f(x_0, y_0)$,

$$z = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (y-y_0),$$

που είναι η γνωστή μας εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της $f$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή ότι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x,y) = g(x)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Αν η $g$ είναι παραγωγίσιμη, υπολογίστε την $\nabla f$ συναρτήσει της $g'$. Σχεδιάστε ένα πιθανό διάγραμμα ισοσταθμικών καμπυλών της $f$ και τοποθετήστε πάνω σε αυτό κάποια διανύσματα κλίσης $\nabla f$.

Απάντηση

Αν $f(x,y) = g(x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x)$ (από τον ορισμό της μερικής παραγώγου)

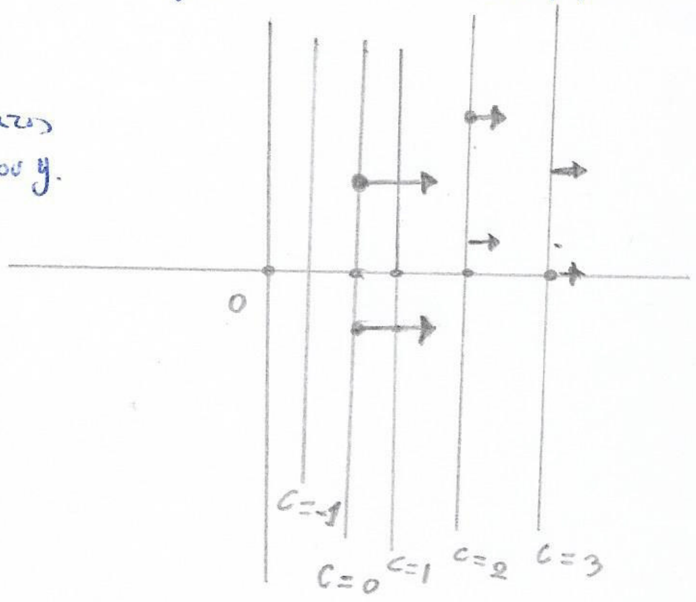
και $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Άρα $\nabla f(x_0,y_0) = (g'(x_0), 0) \quad \forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

δηλαδή $\nabla f(x_0,y_0) = g'(x_0) \cdot \vec{i} \quad \forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

Το διάνυσμα κλίσης σε κάθε σημείο είναι παράλληλο με τον άξονα $x'x$. Αυτό συμβαίνει γιατί οι καμπύλες στάθμης είναι ευθείες παράλληλες με τον άξονα $y'y$, όπως στο παρακάτω διάγραμμα.

Παρατηρούμε επίσης ότι το μέτρο του διανύσματος $\nabla f$ είναι ανεξάρτητο του $y$.



5. Βρείτε την κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης και την κατεύθυνση της ταχύτερης μείωσης για τη συνάρτηση $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ στο σημείο $(1,1,1)$.

Απάντηση

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη ως πολυωνυμική.

Σε αυτή την περίπτωση, όπως ξέρουμε, η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης της $f$ στο σημείο $\vec{a}$ είναι η κατεύθυνση του διανύσματος $\nabla f(\vec{a})$, ενώ η κατεύθυνση της ταχύτερης μείωσης της $f$ στο $\vec{a}$ είναι η κατεύθυνση του $-\nabla f(\vec{a})$.

Εδώ έχουμε:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = [y+z]_{(1,1,1)} = 2 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = [x+z]_{(1,1,1)} = 2$$

και $$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = [x+y]_{(1,1,1)} = 2 .$$

Άρα $\nabla f(1,1,1) = (2,2,2) = 2\cdot(1,1,1)$,

δηλαδή η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης είναι η κατεύθυνση του διανύσματος

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

και η κατεύθυνση της ταχύτερης μείωσης είναι η αντίθετη, δηλαδή η κατεύθυνση του διανύσματος

$$\vec{w} = -\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \text{ και } f(0,0)=0.$$

Δείξτε ότι η $f$ έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$ στο $(0,0)$, αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Απάντηση

Αφού δεν ξέρουμε ότι η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ — και μάλιστα θα δείξουμε ότι δεν είναι — δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}$ για την κατευθυνόμενη παράγωγο.
Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.
Σύμφωνα με τον ορισμό, αν το $\vec{u} = (v, w)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα ($\|\vec{u}\| = \sqrt{v^2+w^2} = 1$), τότε

$$D_{\vec{u}}(f)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(v,w)) - f(0,0)}{t}, \quad \text{άρα}$$

$$D_{\vec{u}}(f)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 v^3}{t\,(t^2v^2+t^2w^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{v^3}{v^2+w^2} = v^3$$

Άρα η κατευθυνόμενη παράγωγος υπάρχει σε κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$.
Ειδικότερα, για $\vec{u} = \vec{i} = (1,0)$ παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

και, για $\vec{u} = \vec{j} = (0,1)$, παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Αν τώρα η $f$ ήταν διαφορίσιμη στο $(0,0)$, τότε το διαφορικό της θα ήταν ο πίνακας γραμμή $Df(0,0) = [1 \;\; 0]$

και θα έπρεπε να ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|}{\|(x,y)\|} = 0 .$$

Όμως

$$\frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|}{\|(x,y)\|} = \frac{\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - x \right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\left| x^3 - x(x^2+y^2) \right|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Βλέπουμε ότι, καθώς το $(x,y)$ τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα των $x$, είναι

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0 ,$$

ενώ, καθώς το $(x,y)$ τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=x$, είναι

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^3|}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ,$$

δηλαδή το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Συμπεραίνουμε ότι η $f$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.