# 5η Σειρά Ασκήσεων

Θα συμβολίζουμε στα παρακάτω τις μερικές παραγώγους μιας συνάρτησης $f$ με $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ... κοκ.

## Άσκηση 1

Έστω $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ και $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$
Να υπολογιστεί το διαφορικό $D(f \circ g)(1,1)$

## Λύση

Έχουμε ότι $D(f \circ g)(1,1) = Df(g(1,1))\,Dg(1,1) =$
$= Df(2,1) \cdot Dg(1,1)$ (γινόμενο πινάκων)

Έχουμε ότι $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, όπου $g_1(x,y) = x^2+1$
και $g_2(x,y) = y^2$
Τώρα $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = 2y$

Οπότε $$Dg(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Όμοια $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$, όπου
$f_1(u,v) = u+v$, $f_2(u,v) = u$, $f_3(u,v) = v^2$
Οπότε $$Df(2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,1)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Οπότε τελικά $$D(f \circ g)(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## Άσκηση 2

Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $C^1$ συνάρτηση και $z = f(x,y)$

Κάνουμε την αντικατάσταση $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

Να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

## Λύση

Παίρνουμε δηλαδή την $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = z$

Έχουμε λοιπόν ότι $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta$$

Προσοχή: $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) +$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) r\cos\theta$$

π.χ. Για $r=1$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$: $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\left(1, \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Άσκηση 3

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^2$ συναρτήσεις και $F(x,y) = f(x+g(y))$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της $F$ και να δειχθεί ότι: $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

Λύση

Παράγωγοι 1ης τάξης: $F_x = f'(x+g(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x+g(y)) = f'(x+g(y))$

$F_y = f'(x+g(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x+g(y)) = f'(x+g(y)) g'(y)$

Παράγωγοι 2ης τάξης

- $F_{xx} = (F_x)_x = f''(x+g(y)) \frac{\partial}{\partial x}(x+g(y)) = f''(x+g(y))$
- $F_{xy} = (F_x)_y = f''(x+g(y)) g'(y)$
- $F_{yx} = (F_y)_x = f''(x+g(y)) \frac{\partial}{\partial x}(x+g(y)) g'(y) = f''(x+g(y)) g'(y)$

(Βλέπουμε ότι $F_{xy} = F_{yx}$. Αυτό όμως δε χρειαζόταν τον υπολογισμό, αφού οι $f, g$ είναι $C^2 \Rightarrow F$ είναι $C^2$)

- Τέλος $F_{yy} = f''(x+g(y))(g'(y))^2 + f'(x+g(y)) g''(y)$

Τώρα $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_x \cdot F_{xy} = f'(x+g(y)) f''(x+g(y)) g'(y)$ και

$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_y F_{xx} = f'(x+g(y)) g'(y) f''(x+g(y))$ και άρα

έχουμε τη ζητούμενη ισότητα

## Άσκηση 4

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Αν $h = f \circ g$, δείξτε ότι $\|\nabla h(x,y,z)\|^2 = 4g(x,y,z) \cdot (f'(g(x,y,z)))^2$ και ότι η κατεύθυνση του διανύσματος κλίσης $\nabla h(x,y,z)$ συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης του σημείου $(x,y,z)$.
Δώστε γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος με βάση τη μορφή που έχουν οι επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης $h$

## Λύση

Έχουμε ότι $\dfrac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x,y,z)) \dfrac{\partial g}{\partial x} = f'(g(x,y,z)) \cdot 2x$

Όμοια $\dfrac{\partial h}{\partial y} = f'(g(x,y,z)) \dfrac{\partial g}{\partial y} = f'(g(x,y,z)) \cdot 2y$

και $\dfrac{\partial h}{\partial z} = f'(g(x,y,z)) \cdot 2z$

Οπότε $\nabla h(x,y,z) = \left( \dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}, \dfrac{\partial h}{\partial z} \right) = 2f'(g(x,y,z)) \cdot (x,y,z)$

και άρα $\nabla h(x,y,z) \parallel (x,y,z)$, δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση

Τώρα $\|\nabla h(x,y,z)\|^2 = \|2f'(g(x,y,z))(x,y,z)\|^2 =$
$= |2f'(g(x,y,z))|^2 \|(x,y,z)\|^2 = 4(f'(g(x,y,z)))^2 (\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2$
$= 4(f'(g(x,y,z)))^2 \, g(x,y,z)$

Γεωμετρική ερμηνεία: Παρατηρούμε ότι η $h$ είναι σταθερή πάνω σε σφαίρες κέντρου $O$. Άρα οι επιφάνειες στάθμης της θα είναι σφαίρες, αφού οι τιμές της $h$ εξαρτώνται από την απόσταση ενός σημείου από το $O(0,0,0)$.
Αν $P(x,y,z)$ σημείο μιας σφαίρας, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα στο $P$ είναι κάθετο στην ακτίνα $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$
Οπότε το διάνυσμα κλίσης της $h$ στο $P$, που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στάθμης στο $P$, θα έχει τη διεύθυνση του $\overrightarrow{OP}$

Άσκηση 5

Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις δείξτε ότι οι μικτές παράγωγοι $f_{xy}$, $f_{yx}$ είναι ίσες

Λύση

α) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

$f_x = 4x^3 - 8xy^2$, $f_{xy} = (f_x)_y = -16xy$

$f_y = 4y^3 - 8x^2y$, $f_{yx} = (f_y)_x = -16xy$ $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

β) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$

$f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_{xy} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, $f_{yx} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

γ) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ δηλαδή είναι πολλαπλάσιο της συνάρτησης στο β). Οπότε προφανώς θα ισχύει ισότητα $f_{xy} = f_{yx}$ λόγω β) ( $\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$ κ.ο.κ )

δ) $f(x,y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $y \neq 0$

$f_x = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x^2}{y}\right)} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = \dfrac{2x}{y\cos^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}$

Οπότε $f_{xy} = -\dfrac{2x\left(\cos^2\left(\frac{x^2}{y}\right) + 2\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\sin\left(\frac{x^2}{y}\right)\cdot\frac{x^2}{y}\right)}{y^2\cos^4\left(\frac{x^2}{y}\right)}$

$f_y = -\dfrac{x^2}{y^2\cos^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}$

Άρα $f_{yx} = -\dfrac{2x\cos^2\left(\frac{x^2}{y}\right) + 4\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\sin\left(\frac{x^2}{y}\right)\frac{x^3}{y}}{y^2\cos^4\left(\frac{x^2}{y}\right)}$

Βλέπουμε ότι $f_{yx} = f_{xy}$

## Άσκηση 6

Επαληθεύστε την $f_{xzw} = f_{zwx}$ για την $f(x,y,z,w) = e^{xyz}\sin(xw)$

## Λύση

Έχουμε ότι $f_x = yz e^{xyz}\sin(xw) + w e^{xyz}\cos(xw)$

Οπότε $f_{xz} = y e^{xyz}\sin(xw) + zy^2 x e^{xyz}\sin(xw) + xyw e^{xyz}\cos(xw)$

Άρα $f_{xzw} = yx e^{xyz}\cos(xw) + zy^2x^2 e^{xyz}\cos(xw) + xy e^{xyz}\cos(xw)$
$- x^2yw e^{xyz}\sin(xw) = 2xy e^{xyz}\cos(xw) + zy^2x^2 e^{xyz}\cos(xw) - x^2yw e^{xyz}\sin(xw)$

Τώρα $f_z = xy e^{xyz}\sin(xw)$

Οπότε $f_{zw} = x^2 y e^{xyz}\cos(xw)$

Συνεπώς $f_{zwx} = 2xy e^{xyz}\cos(xw) + x^2y^2z e^{xyz}\cos(xw) - x^2yw e^{xyz}\sin(xw)$

Άρα πράγματι, $f_{zwx} = f_{xzw}$

# Άσκηση 7

Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

## Λύση

α) $f(x,y) = \sin(x^2 - 3xy)$

$f_x = (2x-3y)\cos(x^2-3xy)$, $f_y = -3x\cos(x^2-3xy)$

- $f_{xx} = 2\times\cos(x^2-3xy) - (2x-3y)^2\sin(x^2-3xy)$
- $f_{xy} = f_{yx} = -3\cos(x^2-3xy) + 3x(2x-3y)\sin(x^2-3xy)$ [η $f$ είναι $C^2$]
- $f_{yy} = -9x^2 \sin(x^2-3xy)$

β) $f(x,y) = x^2y^2e^{2xy}$

$f_x = 2xy^2e^{2xy} + 2x^2y^3e^{2xy}$, $f_y = 2x^2ye^{2xy} + 2x^3y^2e^{2xy}$

- $f_{xx} = 2y^2e^{2xy} + 4xy^3e^{2xy} + 4xy^3e^{2xy} + 4x^2y^4e^{2xy}$
- $f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{2xy} + 4x^2y^2e^{2xy} + 6x^2y^2e^{2xy} + 4x^3y^3e^{2xy} =$
  $= 4xye^{2xy} + 10x^2y^2e^{2xy} + 4x^3y^3e^{2xy}$
- $f_{yy} = 2x^2e^{2xy} + 4x^3ye^{2xy} + 4x^3ye^{2xy} + 4x^4y^2e^{2xy}$

## Άσκηση 8

Μια συνάρτηση $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου $U$ ανοιχτό, λέγεται αρμονική αν είναι $C^2$ και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ στο } U$$

Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές

## Λύση

α) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ (προφανώς $C^2$ ως πολυωνυμική - είναι $C^\infty$ μάλιστα)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } f_x = 3x^2 - 3y^2 \text{ και } f_{xx} = 6x \\ \text{Επίσης } f_y = -6xy \text{ και } f_{yy} = -6x \end{array}\right\} \Rightarrow f_{xx} + f_{yy} = 0$$

β) $f(x,y) = e^x \cos y$, που είναι $C^\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } f_x = e^x \cos y \Rightarrow f_{xx} = e^x \cos y \\ \text{Τώρα } f_y = -e^x \sin y \Rightarrow f_{yy} = -e^x \cos y \end{array}\right\} \Rightarrow f_{xx} + f_{yy} = 0$$

γ) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ και είναι $C^\infty$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Τώρα $f_x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f_{xx} = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Επίσης $f_y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow f_{yy} = \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Άρα $f_{xx} + f_{yy} = 0$ και είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Άσκηση 9

Λέμε ότι οι $C^1$ συναρτήσεις $u, v: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου $U$ ανοιχτό, ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann, αν
$u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ στο $U$

Ποιες από τις παρακάτω ικανοποιούν τις εξισώσεις C-R;

Λύση

α) $u(x,y) = e^{-x}\cos y$, $v(x,y) = e^{-x}\sin y$

Έχουμε $u_x = -e^{-x}\cos y$, $u_y =$ -e^(-x)sin(y), $v_x = -e^{-x}\sin y$, $v_y = e^{-x}\cos y$

Παρατηρούμε ότι $u_x \neq v_y$ εν γένει. Οπότε δεν ικανοποιούνται οι C-R

β) $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 2xy$

Έχουμε ότι $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 2y$, $v_y = 2x$
και $u_y \neq -v_x$. Άρα ούτε εδώ ικανοποιούνται

γ) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$

Έχουμε $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_y = -6xy$, $v_x = 6xy$, $v_y = 3x^2 - 3y^2$
και βλέπουμε ότι $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$

Οπότε ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann

δ) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ στο $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

Υπενθυμίζουμε ότι $\frac{d}{dt}(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}$

Έχουμε ότι $u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $u_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$

Επίσης $v_x = \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-2y}{x^2+y^2} = -u_y$

Τέλος, $v_y = \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2+y^2} = u_x$

Οπότε ικανοποιούνται και εδώ οι C-R

## Άσκηση 10 (Θεώρημα Μέσης τιμής)

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{a},\vec{\beta}]=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{\beta} \mid 0\le t\le 1\}$ να περιέχεται στο $D$

Αν $f: D\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη, τότε υπάρχει $\vec{z}\in(\vec{a},\vec{\beta})$, ώστε $f(\vec{\beta})-f(\vec{a})=\nabla f(\vec{z})(\vec{\beta}-\vec{a}) \Leftrightarrow f(\vec{\beta})-f(\vec{a})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{z})(\beta_i-a_i)$,

(αφού $\nabla f(\vec{z})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{z}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{z})\right)$)

### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma:[0,1]\to D$, $\vec{\sigma}(t)=(1-t)\vec{a}+t\vec{\beta}$ που είναι καλά ορισμένη

Συνεπώς ορίζεται η σύνθεση $\varphi=f\circ\vec{\sigma}:[0,1]\to\mathbb{R}$, με τύπο $\varphi(t)=f((1-t)\vec{a}+t\vec{\beta})$

Παρατηρούμε ότι η $\varphi$ είναι πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, αφού $\sigma$ συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f$ διαφορίσιμη.

Συνεπώς από Θ.Μ.Τ (στον $\mathbb{R}$) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0}=\varphi'(\xi) \Leftrightarrow f(\vec{\beta})-f(\vec{a})=\varphi'(\xi)$

Τώρα $\varphi'(\xi)=(f\circ\sigma)'(\xi)=\nabla f(\vec{\sigma}(\xi))\vec{\sigma}'(\xi)$

Τώρα $\sigma'(t)=-\vec{a}+\vec{\beta}=\vec{\beta}-\vec{a}$ $\forall t\in[0,1] \Rightarrow \vec{\sigma}'(\xi)=\vec{\beta}-\vec{a}$

και $\vec{\sigma}(\xi)=(1-\xi)\vec{a}+\xi\vec{\beta}\in(\vec{a},\vec{\beta})$, αφού $\xi\in(0,1)$

Άρα θέτοντας $\vec{z}=\sigma(\xi)$, έχουμε ότι $f(\vec{\beta})-f(\vec{a})=\nabla f(\vec{z})(\vec{\beta}-\vec{a})$